2 Zadania

2.1 Warunki Cauchy'ego-Riemanna itd.

1. Dla następujących funkcji wypisać ich części rzeczywiste i urojone. Sprawdzić, czy następujące funkcje spełniają w całej płaszczyźnie równania Cauchy'ego–Riemanna. Sprawdzić też, czy części rzeczywiste i urojone spełniają równanie Laplace'a.

   (a) $f = z^3$;

   (b) $f = (\mathrm{Re} z)z^2$;

   (c) $f = e^{iz^2}$;

   (d) $f = \bar{z}\mathrm{Re} z$;

   (e) $f = \frac{1}{z}$;

   (f) $f = \frac{1}{z^2+1}$.

2. Sprawdzić, czy następujące funkcje są harmoniczne. Jeśli tak, to znaleźć funkcję harmonicznie sprzężoną do danej, oraz wynik zapisać jako funkcję samego z.

   (a) $x^2 - y^2 + 4xy$;

   (b) $\frac{x}{x^2+y^2}$;

   (c) $x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$;

   (d) $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

   (e) $e^x(x \cos y - y \sin y)$.

3. Obliczyć całkę $\int_\gamma \mathrm{Re} z \mathsf{d}z$ dla:

   (a) $\gamma = [0, 2 + 2i]$;

   (b) γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1.

4. Obliczyć całkę: $\int_\gamma |z - 1||\mathsf{d}z|$, gdzie γ – okrąg o środku w 0 i promieniu 1.

5. Obliczyć całkę $\int_\gamma |z|\mathsf{d}z$, jeżeli:

   (a) $\gamma = [-i, i]$;

   (b) γ jest lewym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i,

   (c) γ jest prawym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i

6. Okrąg o środku w punkcie p i promieniu r będziemy oznaczać $C(p,r)$. Obliczyć całkę $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\mathsf{d}z$, jeżeli:

   (a) $\gamma = C(0,\frac{1}{2})$;

   (b) $\gamma = C(0,2)$;

   (c) $\gamma = C(i,1)$;

   (d) $\gamma = C(-i,1)$.

   Wsk. Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste.

7. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}\mathsf{d}z$$
gdzie $\gamma = C(2+i,\sqrt{2})$. *Wsk.* Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

8. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}\mathsf{d}z$$
gdzie $\gamma = C(a,a)$, $a > 1$. *Wsk.* Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste i korzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

9. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+a^2}\mathsf{d}z$$
gdzie $\gamma = C(0,2a)$, $a > 0$. *Wsk.* jw.

10. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathsf{d}z$$
gdzie:

   (a) $\gamma = C(0,\frac{1}{2})$,

   (b) $\gamma = C(1,\frac{1}{2})$.

   Wsk. Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego dla drugiej pochodnej funkcji holomorficznej.

11. Dla podanych niżej funkcji znaleźć cztery początkowe różne od zera współczynniki rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z = 0$, oraz podać promień zbieżności R odpowiedniego szeregu Taylora:

   (a) $\exp \frac{z}{1-z}$;

(b) $\sin \frac{z}{1-z}$;

(c) $\cos^2 z$;

(d) $\frac{1}{\cos z}$.

12. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

(a) $|z| < 1$;

(b) $1 < |z| < 2$;

(c) $|z| > 2$.

13. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

(a) $|z| < 1$;

(b) $1 < |z| < 2$;

(c) $|z| > 2$.

14. Znaleźć residua funkcji:

(a) $\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)}$ w punktach $0, 1, -1$;

(b) $\frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$ w punktach $0, 1$;

(c) $\frac{e^{ez}}{1-z^4}$ w punktach $1, -1, i, -i$;

(d) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$ $(a \neq 0)$ w punktach $ai, -ai$; **Odp.** $\frac{-ie^{-am}}{4a^3}(am+1)$ w punkcie ai

(e) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^3}$ $(a \neq 0)$ w punktach $ai, -ai$;

(f) $(z^3 - z^5)^{-1}$ w punktach osobliwych;

(g) $\mathrm{ctg}^3 z$ w punktach osobliwych;

(h) $\sin \frac{z}{z+1}$ w punktach osobliwych;

(i) $\frac{1}{(1+z^2)^4}$ z punkcie i;

(j) $\frac{z^6}{(1+z)^3}$ w punkcie -1.

2.2 Całki trygonometryczne

15. Wykazać, że przy $0 < b < a$ zachodzi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \mathrm{d}\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

16. Wykazać, że przy $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta \mathsf{d}\theta}{1 + a^2 - 2a\cos 2\theta} = \pi \frac{1 - a + a^2}{1 - a}$$

17. Wykazać, że dla $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathsf{d}\theta}{(1 + a\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}^3}$$

2.3 Całki z funkcji wymiernych

18. Wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 \mathsf{d}x}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3} \quad (a > 0);$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathsf{d}x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}, \quad a, b > 0;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^6 \mathsf{d}x}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}, \quad a > 0.$

2.4 Całki z funkcji wymiernych razy f. trygonometryczne

19. Wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x \mathsf{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (a > 0);$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin x \mathsf{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}}{4a} \quad (a > 0);$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x \mathsf{d}x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{b^2 - a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) \quad (a \neq b, a, b > 0);$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x \mathsf{d}x}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi e^{-a}(a^2 + 3a + 3)}{2^3 a^5} \quad (a > 0);$ *Uwaga.* wynik sprawdzony dla $a = 1$ only

2.5 Całki z funkcji wieloznacznych

Terminologia: *Konturem ODS*[2] będziemy nazywać figurę, złożoną z dwóch półokręgów o promieniach r oraz R ($R > r$), o środkach w 0 i leżących

[2] Geneza nazwy ODS była na wykładzie

w górnej półpłaszczyźnie, oraz odcinków $[-R,-r]$ i $[r,R]$, leżących na osi rzeczywistej.

20. Całkując funkcję $f(z) = (\mathrm{Log} z)^2(z^2+a^2)^{-1}$ po konturze ODS wykazać, że przy $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+a^2}\mathsf{d}x = \frac{\pi}{8a}(\pi^2+4(\log a)^2), \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a.$$

21. Wykazać w podobny sposób, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathsf{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

22. Całkując po "dziurce od klucza" funkcję: $\exp(a\mathrm{Log} z(z^2+1)^{-2}$ wykazać, że dla $-1 < a < 3$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\mathsf{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1-a)}{4\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

Skąd się bierze powyższy warunek na a?

23. Całkując funkcję $\frac{\mathrm{Log} z}{1+z^2}$ wzdłuż brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R\} \cap \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\}$ wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4}\mathsf{d}x = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2\log x}{1+x^4}\mathsf{d}x = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

24. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}\mathsf{d}x = 2^{-3/2}\pi a^{-5/2}\left(\frac{3}{2}\log a - 1 - \frac{3\pi}{4}\right), \quad a > 0.$$

25. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\mathsf{d}x = \pi\log 2.$$

Wsk. Całkować funkcję $\frac{\mathrm{Log}(z+i)}{1+z^2}$ po brzegu górnego półkola $K(0,R)$.