Algebra B

12.05.2009

1. Niech $W = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} >$. Znaleźć bazę przestrzeni $W^{\perp}$:
   (a) w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym
   (b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym danym wzorem $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 4x^2y^2 + 2x^3y^3 - x^3y^4 - x^4y^3 + 2x^4y^4$.

2. Uzupełnić do bazy ortogonalnej podane układy wektorów:
   (a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
   (b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta znaleźć (ortonormalne) bazy przestrzeni W otrzymane z podanych baz $\mathcal{A}$:
   (a) $W = < v_1, v_2, v_3 >$, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$,
   $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (b) $W = < v_1, v_2, v_3 >$, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$,
   $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$
   (c) $W = < v_1, v_2, v_3 >$, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(d) $W = \mathbb{R}_4[x]$, $\mathcal{A} = st$, $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

(e) $W = \mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{A} = st$, $(f|g) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)g(x)dx$

4. Znaleźć rzuty ortogonalne (i ortogonalne do W składowe) podanych wektorów na wskazane podprzestrzenie W przestrzeni euklidesowych:

(a) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; $W =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} >$

(b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$; $W =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

(c) $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$; $W =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} >$

(d) $u(t) = x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$, $W = \mathbb{R}_3[x]$, $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

(e) $u(t) = x^4 - 2x^3 \in \mathbb{R}_4[x]$, $W = \mathbb{R}_3[x]$, $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

(f) $u(t) = 6x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{R}_2[x]$, $(f|g) = \int_{-1}^{1} 5\sqrt{x} f(x)g(x)dx$

5. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy wektory $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 + 2\sqrt{3} \\ 2 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\gamma_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$.

(a) Obliczyć kąt między wektorami v, w

(b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ kąt między wektorami α i γ_t wynosi $\frac{2\pi}{3}$.

6. Wyznaczyć kąt pomiędzy wektorem u a podprzestrzenią W:

(a) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W =< \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} >$

(b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, W =< \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >.$