Analiza II seria 01

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

- Zbadać różniczkowalność następujących funkcji

  1. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$
  2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$
  3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$
  4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

- Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona następująco

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^4} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

  ma w punkcie $(0,0)$ pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu, ale pochodne te nie są identyczne.

- Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y+\frac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

  Pokazać, że f jest ciągła oraz ma pochodne cząstkowe w dowolnym punkcie $\mathbb{R}^2$ ale nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$. Pokazać, że f ma w punkcie $(0,0)$ pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach.

Zamiana zmiennych/pochodna funkcji złożonej[1]

- Przekształć równanie $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ wprowadzając nowe zmienne (t,u,v) takie, że $x=t, y=\frac{t}{1+tu}, z=\frac{t}{1+tv}$
- Przechodząc do współrzędnych sferycznych pokazać, że wyrażenia $W_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ i $W_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ są postaci $W_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2$, $W_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$
- Przekształcić następujące wyrażenia wprowadzając nowe zmienne

  1. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ jeżeli $u = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ i $v = \ln\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)$
  2. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ jeżeli $u = x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ i $v = x$
  3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z = 0$ jeżeli $x = e^u\cos v$ i $y = e^u\sin v$

Wartości maksymalne/minimalne funkcji na zbiorach zwartych

- Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji określonych wzorami

  1. $f(x,y) = x^2-y^2$ na kole $x^2+y^2 \leq 4$
  2. $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na trójkącie, którego boki leżą na prostych $x=0, y=0, x+y=6$
  3. $f(x,y) = x^2-xy+y^2$ na obszarze $D : |x|+|y| \leq 1$
  4. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{i=1}^4 \sin x_i - \sin\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)$ na $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_i \in [0,\pi], i=1,2,3,4\}$

[1] Zakres zmienności zmiennych jest taki aby poniższe wyrażenia miały sens.

- Zadania geometryczne

  1. Na okręgu o promieniu r opisać trójkąt o najmniejszym polu.
  2. W stożek kołowy o promieniu podstawy R i długości wysokości h wpisać prostopadłościan o maksymalnej objętości
  3. W trójkącie o długościach boków a, b, c znaleźć punkt, dla którego suma kwadratów odległości od trzech boków jest najmniejsza

Trudniejsze/ciekawsze

- Dana jest funkcja f określona wzorem $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gdzie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$i $f \in \mathcal{C}^2(E)$. Przyjmując wzory na zamianę zmiennych (tzn. zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ na $t_1, t_2, \ldots, t_n, v$):

  $$t_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\ i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{oraz} \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - z$$

  oraz zakładając, że wyznacznik $H = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$ na E wykazać, że przekształcenie odwrotne jest symetryczne, tzn. $x_i = \frac{\partial v}{\partial t_i},\ i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $z = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial v}{\partial t_i} - v$

- Niech $f : \mathbb{R}^n \supset E \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f różniczkowalna jest funkcją dodatnio jednorodną stopnia $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ jeżeli $\bigwedge_{x \in E} \bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, \ldots tx_n)$. Udowodnić wzór Eulera, który mówi że funkcja jest jednorodna stopnia $\alpha \iff \alpha f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ (bardzo użyteczna własność w termodynamice)