Zadania z Analizy IV
Seria treningowa - 10 czerwca 2019

Zadanie 1

Niech dane będą operatory A oraz B z dziedzinami odpowiednio D_A i D_B takimi, że $UD_A = D_B$ oraz $UAU^{-1}x = Bx$ dla każdego $x \in D_B$ i pewnego operatora unitarnego U. Pokazać, że jeśli A jest samosprzężony, to również B jest samosprzężony.

Zadanie 2

(zadanie ź gwiazdką") Pokazać, że operator

$$Af = -i\frac{d}{dx}f, \qquad D_A = \{f \in C^1[0, 2\pi] | f(0) = f(2\pi)\}$$

jest istotnie samosprzężony.

Zadanie 3

Rozwiązać równanie falowe

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

z warunkami $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dla $t > 0$, $u(x,0) = x(1-x)$ dla $0 < x < 1$ oraz $u_t(x,0) = 0$ dla $0 < x < 1$.

Zadanie 4

Rozwiązać jednorodne równanie falowe na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ z warunkami $u(x,0) = \sin x$ oraz $u_t(x,0) = x^2$.

Zadanie 5

Rozwiązać równanie falowe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = xe^t, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

z warunkami $u(x,0) = \sin x$ oraz $u_t(x,0) = 0$.

Zadanie 6

Rozwiązać równanie przewodnictwa ciepła

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L,$$

z warunkami $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dla każdego $t \geqslant 0$ oraz $u(x,0) = 20$.

Zadanie 7

Rozważmy równanie przewodnictwa ciepła na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Załóżmy, że warunek początkowy f spełnia $f(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że albo $u(t,x) > 0$ dla każdego $t > 0$, albo jednocześnie $u(t,x) \equiv 0$ i $f(x) \equiv 0$.

Zadanie 8

Niech $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |], 0 < x < L, 0 < y < H\}$. Używając separacji zmiennych rozwiązać równanie

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0,y) = 0 = u(L,y),\ 0 < y < H$$

oraz

$$u(x,0) - u_y(x,0) = 0,\ u(x,H) = f(x),\ \ 0 < x < L.$$

Zadanie 9

Znaleźć funkcję Greena dla zbioru

$$\mathbb{R}^2_{++} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$