Seria zadań domowych

Matematyka $\overline{\underline{\text{II}}}$, Funkcje holomorficzne

<u>Zad 1</u> Znaleźć funkcje harmoniczne sprzężone z funkcjami harmonicznymi

a) $x^2 - y^2 + xy$ b) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-2}$

<u>Zad 2</u> Wyznaczyć funkcję v harmoniczną sprzężoną z funkcją $u(x,y) = \dfrac{(1+x^2+y^2)\cdot x}{1+2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)^2}$

wyznaczyć $u+iv$ w bezpośredniej zależności od $z = x+iy$. (Jan Kryś zad 2.2.11)

Zad 3 (Jan Kruży 3.2.9) Wyznaczyć wszystkie możliwe całki $\int_\Gamma \frac{dz}{z(z^2-1)}$ gdzie Γ jest krzywą zamkniętą nie przechodzącą przez $0, 1, -1$.

Zad 4 (Jan Kruży 3.2.15)

$C(R) = \{z : |z| = R\}$ $\quad |a| < R < |b|$.

Opierając się na wzorze Cauchy'ego na pochodną wyznaczyć całkę

$$\int_{C(R)} \frac{dz}{(z-b)(z-a)^m}$$

Zad 5 (Jan Kryż 3.4.19)

Wyznaczyć residua niżej podanych funkcji we wszystkich izolowanych ptach osobliwych.

(a) $(z^3-z^5)^{-1}$ (b) $\dfrac{e^{z}}{z^2(z^2+4)}$ (c) $\mathrm{ctg}^2 z$

(d) $\left(z\left(1-e^{hz}\right)\right)^{-1}$ $h\in\mathbb{C}$

Zad 6 (Jan Kryż 3.5.2. & 3.5.3)

Wyznaczyć całki

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ $\Gamma=\{(x,y):\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\}.$

(6) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^3} \quad \left(= -\frac{2\pi i}{3}\right) \qquad \Gamma = \{(x,y) : 2x^2+y^2 = \frac{3}{2}\}$

Zad 7

Obliczyć następujące całki: (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1-2a\cos x + a^2}$; (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+6x^2+25}$; (c) $\int_0^{\infty} \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4}$, $a, b > 0$;
(d) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x\,dx}{(x^2+\pi^2)^2}$; (e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x\,dx}{x^4+5x^2+4}$; (f) $\int_0^{\infty} \frac{(\cos 2ax - \cos 2bx)\,dx}{x^2}$, jeśli $a, b > 0$;
(g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}+e^{ax/2}}{1+e^x} dx$, jeśli $0 < a < 1$; (h) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{(x+1)(x+2)}$; (i) $\int_0^{\infty} \frac{\log x\,dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$.

Zad 7 Rozwiązania.

18. (a) $I = \frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z-a)(az-1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{|z|<1} \mathrm{res}_z f(z)$, $\mathrm{res}_0 = 1 + a^{-2}$, $\mathrm{res}_a = 1 - a^{-2}$, $\mathrm{res}_{\frac{1}{a}} = a^{-2} - 1$, więc $I = \begin{cases} \pi, & |a| < 1 \\ \pi a^{-2}, & |a| > 1 \end{cases}$ (dla $|a| = 1$, $a \neq \pm 1$ całka jest rozbieżna).

(b) $\mathrm{res}_{1+2i} \left[\frac{z^2}{z^4+6z^2+25}\right] = \frac{2-i}{16}$, $\mathrm{res}_{-1+2i} \frac{z^2}{z^4+6z^2+25} = \frac{-2-i}{16}$, więc całkowanie po brzegu półkola K_R^+ daje $I = 2i\pi \sum_z \mathrm{res}_z \ldots = \frac{\pi}{4}$.

(c) $\mathrm{res}_{i\sqrt{a/b}} \left(\frac{z}{a+bz}\right)^4 = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dz^3}\Big|_{z=i\sqrt{a/b}} \left(\frac{z}{bz+i\sqrt{ab}}\right)^4 = -\frac{i}{32\sqrt{a^3b^5}}$, więc całkowanie po brzegu półkola K_R^+ daje $I = \frac{\pi}{32} a^{-3/2} b^{-5/2}$.

(d) $\mathrm{res}_{i\pi} \left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+\pi^2)^2}\right] = \frac{d}{dz}\Big|_{z=i\pi} \frac{ze^{iz}}{(z+i\pi)^2} = \frac{e^{-\pi}}{4\pi}$, więc całkowanie po brzegu półkola K_R^+ daje $I = \pi\, \mathrm{res}_{i\pi} \ldots = e^{-\pi}$.

(e) $\mathrm{res}_i \left[\frac{z^3 e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right] = -\frac{1}{6} e^{-1}$, $\mathrm{res}_{2i} \left[\frac{z^3 e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right] = \frac{2}{3} e^{-2}$, więc całkowanie po brzegu półkola K_R^+ daje $I = 2\pi \sum_z \mathrm{res}_z \ldots = \frac{\pi}{3e^2}(4-e)$.

(f) $\mathrm{res}_0 \left[\frac{1}{z^2}\left(e^{2iaz} - e^{2ibz}\right)\right] = 2i(a-b)$, więc całkowanie po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ daje $I = \frac{i\pi}{2} \mathrm{res}_0 \ldots = \pi(b-a)$.

(g) $\mathrm{res}_{i\pi} \frac{e^{az}+e^{az/2}}{1+e^z} = -e^{i\pi a} - e^{i\pi a/2}$, więc całkowanie po brzegu prostokąta $\{z : |\mathrm{Re}\, z| < R,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi\}$ daje $I = \frac{\pi(1+2\cos(a\pi/2))}{\sin a\pi}$.

(h) $f(z) := \frac{p(z)}{(z+1)(z+2)}$, $p(re^{i\varphi}) := \sqrt[6]{r} e^{i\varphi/6}$ dla $0 < \varphi < 2\pi$; wtedy $\mathrm{res}_{-1} f(z) = e^{i\pi/6}$, $\mathrm{res}_{-2} f(z) = -\sqrt[6]{2} e^{i\pi/6}$; całkując po brzegu obszaru $K_R \setminus [0, R]$ dostajemy $I = \frac{\pi(\sqrt[6]{2}-1)}{\sin(\pi/6)}$.(i) Stosując kontur taki sam jak w (f), wobec $\mathrm{res}_{-1} f(z) = \frac{\pi}{2} + i$, dostajemy $I = -\pi$.