Wykład 07.12.2021.

Definicja pola powierzchni

Niech S będzie gładką powierzchnią w $\mathbb{R}^3$.

Na przykład

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$$

Parametryzacja S:

$$x = \sin\theta \cos\varphi \qquad \theta \in [0,\pi]$$
$$y = \sin\theta \sin\varphi \qquad \varphi \in [0,2\pi].$$
$$z = \cos\theta$$

θ, φ zadają na sferze siatkę krzywych o ustalonej wsp θ

lub o ustalonej wsp φ.

Jak zdefiniować pole powierzchni S?

Ogólnie: Mając gładką powierzchnię S dzielimy tę powierzchnię siatką krzywych na części $S_1, \dots, S_n$ i w każdej części S_i wybieramy punkt M_i.

Rzutując prostopadle S_i na płaszczyznę styczną w p-kcie M_i otrzymujemy

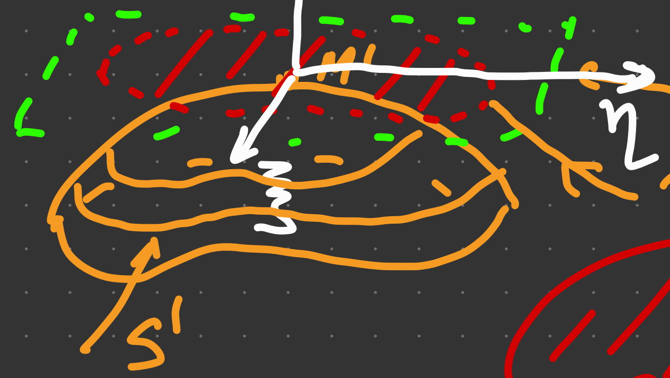
figury płaskie $T_1, \dots, T_n$ o polach $|T_1|, \dots, |T_n|$.
Pole powierzchni $|S|$ to granica sum wszystkich pól $|T_i|$ przy warunku, że średnice S_i dążą do zera.

$$|S| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i |T_i|.$$

Jak obliczać $|S|$?

Rozważmy powierzchnię opisaną parametrami u, v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$.

↑3



– płaszczyzna styczna do M'.

rzut części $S' \subset S$ na pł. stycznej.

– obszar i pole T'.

$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ – współrzędne związane z pł. stycznej.

Niech $M' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ – współrzędne wyróżnionego punktu

Kąty między osiami współrzędnych:

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	λ'	μ'	ν'

Zależności między współrzędnymi

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\lambda' & \cos\mu' & \cos\nu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Skoro $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ $z = z(u,v)$

to z $(*)$ $\xi = \xi(u,v)$ $\eta = \eta(u,v)$ i z tw. o zamianie zmiennych

$$|T'| = \iint_{\Delta'} \left| \det \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

$$\boxed{x'_u = \frac{\partial x}{\partial u} \quad x'_v = \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{i.t.d.}}$$

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} x'_u \cos\alpha_1 + y'_u \cos\beta_1 + z'_u \cos\gamma_1, & x'_v \cos\alpha_1 + x'_v \cos\beta_1 + z'_v \cos\gamma_1 \\ x'_u \cos\alpha_2 + y'_u \cos\beta_2 + z'_u \cos\gamma_2, & x'_v \cos\alpha_2 + y'_v \cos\beta_2 + z'_v \cos\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Bezpośrednim rachunkiem można

sprawdzić, że

$$\det \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} y'_u, & z'_u \\ y'_v, & z'_v \end{bmatrix}}_{A} \cdot \cos\lambda' + \underbrace{\det \begin{bmatrix} z'_u, & x'_u \\ z'_v, & x'_v \end{bmatrix}}_{B} \cos\mu' +$$

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{bmatrix}}_{C.} \cdot \cos\nu' !$$

Gdzie korzystamy z:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda' \\ \cos\mu' \\ \cos\nu' \end{bmatrix}$$

il. wektorowy.

z drugiej strony jeśli oznaczymy A', B', C' - wartości A, B, C w pcie M'.

to
$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ \partial_u z \end{bmatrix}(M') \times \begin{bmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ \partial_v z \end{bmatrix}(M')$$ - wektor

równoległy do osi wsp ξ, który jest

równy
$$\begin{bmatrix} \cos\lambda' \\ \cos\mu' \\ \cos\nu' \end{bmatrix} \ldots = \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix}$$

Podsumowując $\det \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \frac{|A\cdot A' + B\cdot B' + C\cdot C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

W punkcie $u = u'$, $v = v'$ wielkość ta $\approx$ $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Zatem

$$|T'| \simeq \iint_{\Delta'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv$$

w takim razie

$$|S| = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

Przykład: Jeśli $x = u$, $y = v$, $z = f(x,y)$.

$$\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x & z'_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

oraz $$|S| = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Przykład Pole sfery:

$$x = \sin\theta \cos\varphi \qquad y = \sin\theta \sin\varphi \qquad z = \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\theta & z'_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi, & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi, & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}$$

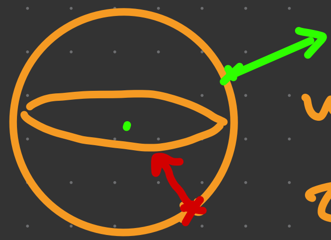
$$\left\| \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta.$$

$$|S| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = 4\pi$$

Całki powierzchniowe 2-go rodzaju.

Niech S będzie dwustronną powierzchnią zorientowaną. Na przykład

S - sfera



wektor normalny na zewnątrz determinuje orientację. Druga możliwa orientacja: wektor normalny do wewnątrz.

Inny przykład:

T - torus.

Powierzchnia sparametryzowana u, v:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{bmatrix}$$ – wektor styczny do krzywej $v = \text{const}$

$$\begin{bmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{bmatrix}$$ – wektor styczny do krzywej $u = \text{const}$.

Iloczyn wektorowy

$$\begin{bmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{bmatrix}$$ – wektor normalny do powierzchni.

Całka $$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

gdzie P, Q, R są funkcjami x, y, z.

definiujemy następująco:

S jest powierzchnią zorientowaną.

Niech $\vec{n}(x,y,z)$ będzie polem wektorów normalnych do S zadających orientację.

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy := \iint_S \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \underset{\text{iloczyn skalarny}}{\cdot} \vec{n}\,dS$$

Przykład: S - sparametryzowane $\underbrace{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)}_{\vec{r}(u,v)}$ zgodnie z orientacją

$$\vec{n}\,dS = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv}_{dS}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \partial_u \vec{r} \underset{\text{iloczyn wekt.}}{\times} \partial_v \vec{r}$$

$\vec{n}$

$$\vec{n}\,ds = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} du\,dv.$$

Przykład S jest wykresem $z(x,y)$.

Orientacje: mamy dwie możliwe orientacje.

- wektor normalny: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial_y z \\ -\partial_x z \\ 1 \end{bmatrix}$

- wektor normalny: $-\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y z \\ \partial_x z \\ -1 \end{bmatrix}$

W I-ym przypadku $\iint\limits_S R\,dx\,dy = \iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$

gdzie $S = \{(x,y,z(x,y)) : x,y \in D\}$

W II-gim przypadku $\iint\limits_S R\,dx\,dy = -\iint\limits_R R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$

Wzór Stokesa

S powierzchnia gładka zorientowana ograniczona konturem L. Na przykład

Krzywa L zorientowana zgodnie z regułą śruby lewoskrętnej.

Niech

$x = x(u,v) \quad y = y(u,v) \quad z = z(u,v).$

zadają parametryzację S zgodną z orientacją. Zauważmy, że

$$\int_L P\,dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Rzeczywiście.

$$\int_L P\,dx = \int_{\partial A} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) =$$

krzywe L we wsp u,v.

$$= \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial}{\partial v}x\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial}{\partial u}x\right)\right)du\,dv$$

wzór Greene

zauważmy, że $P = P(x(u,v), y(u,v), z(x(u,v), y(u,v)))$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial}{\partial v}x\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial}{\partial u}x\right)\right) =$$

$$(\partial_x P\,\partial_u x + \partial_y P\,\partial_u y + \partial_z P\,\partial_u z)\partial_v x + P\,\partial_u\partial_v x +$$

$$-(\partial_x P\,\partial_v x + \partial_y P\,\partial_v y + \partial_z P\,\partial_v z)\partial_u x - P\,\partial_v\partial_u x =$$

$$= \partial_z P\,(\partial_u z\,\partial_v x - \partial_v z\,\partial_u x) - \partial_y P\,(\partial_v y\,\partial_u x - \partial_v x\,\partial_u y)$$

$$\int_L P\,dx = \iint_S \left(\partial_z P\, dz\,dx - \partial_y P\, dx\,dy\right).$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\int_L Q\,dy = \iint_S \left(\partial_x Q\, dx\,dy - \partial_z Q\, dy\,dz\right)$$

$$\int_L R\,dz = \iint_S \partial_y R\, dy\,dz - \partial_x R\, dz\,dx$$

Twierdzenie Stokes'a.

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \Big((\partial_x Q - \partial_y P)\, dx\,dy + (\partial_y R - \partial_z Q)\, dy\,dz + (\partial_z P - \partial_x R)\, dz\,dx \Big).$$

Wzór Gaussa-Ostrogradzkiego.

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ oraz $S = \partial V$ i S skierowany na zewnątrz. Wówczas

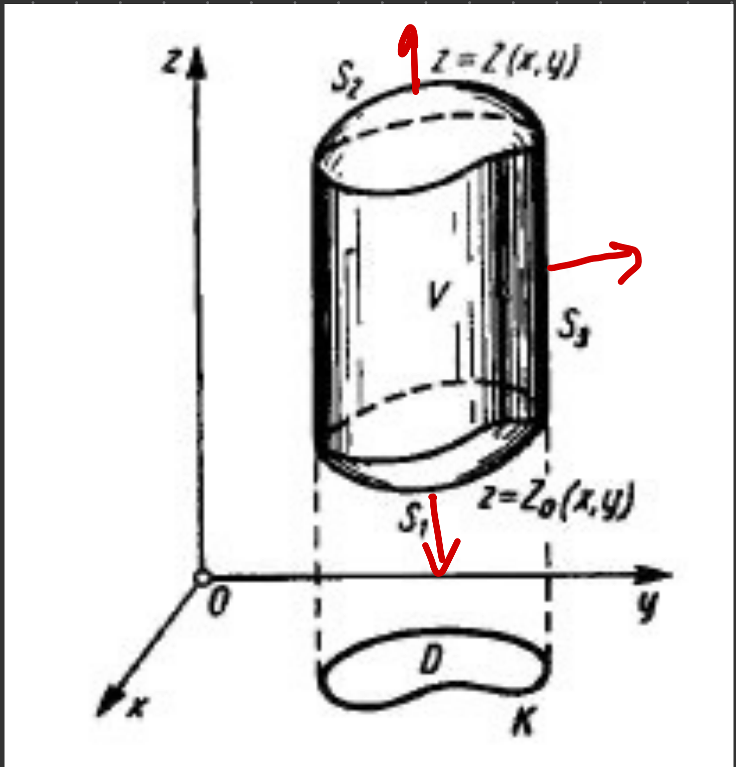
$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = $$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

całka potrójna
definicja i teoria taka
jak dla całki podwójnej.

Dowód:

Przypadek szczególny



Rys. 96

$$V=\{(x,y,z):\ x,y\in D\quad z_0(x,y)\leq z\leq Z(x,y)\}.$$

Udowodnimy, że

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint_S R\,dx\,dy$$

$$L=\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

tw Fubiniego

$$=\iint_D R(x,y,Z(x,y)\,dx\,dy-\int_D R(x,y,Z(x,y))\,dx$$

$$\iint_{S_1} R\,dx\,dy + \iint_{S_2} R\,dx\,dy + \underbrace{\iint_{S_3} R\,dx\,dy}_{=0}$$

Wektor normalny do S_3 leży w płaszczyźnie x, y. $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ zatem

$$\iint_{S_3} R\,dx\,dy = \iint_{S_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} dS = 0$$

Zauważmy, że wzór

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S R\,dx\,dy$$

jest prawdziwy dla brył V które są sumami brył z powyżej rozpatrywanego przypadku: czyli dla brył ograniczonych powierzchniami kawałkami gładkimi.

Podobnie dowodzimy, że

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dz\,dx$$

Zatem

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

$$= \iint_S [P, Q, R] \cdot \vec{n} \, dS.$$

Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce potrójnej.

(1) Algebra:

Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ będą liniowo niezależnymi wektorami. Niech V będzie równoległościanem rozpiętym przez u, v, w.

Objętość $|V|$ = pole podstawy $\times$ wysokość.

$u \times v$ - iloczyn wektorowy.

$\|u \times v\|$ - Pole podstawy.

Kierunek $u \times v$ jest normalny do pł. podstawy. Zatem

$|(u \times v) \cdot w|$ - objętość V.

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot w_3$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

2) Analiza.

$$x = x(\xi, \eta, \zeta)$$
$$y = y(\xi, \eta, \zeta).$$
$$z = z(\xi, \eta, \zeta).$$

V_1 - prostopadłościan w p-ni (ξ, η, ζ) o bokach $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$.

W przybliżeniu liniowym:

V_2 jest prostopadłościanem w (x, y, z) rozpiętym przez $u = \partial_\xi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \delta\xi$ $v = \partial_\eta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \delta\eta$

i $w = \partial_\zeta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \delta\zeta$.

Zatem $|V_2| = \left|\det\begin{bmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x & \partial_\zeta x \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y & \partial_\zeta y \\ \partial_\xi z & \partial_\eta z & \partial_\zeta z \end{bmatrix}\right| \delta\xi\, \delta\eta\, \delta\zeta.$

Przykład

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & r\cos\theta\cos\varphi, & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi, & r\cos\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & , -r\sin\theta, & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(r,\theta,\varphi) = \cos\theta\left(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right)$$
$$+ r\sin\theta\left(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$
$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta\sin\theta = r^2\sin\theta.$$

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Twierdzenie o zamianie zmiennych.

$V \subset \mathbb{R}^3$ – objętość we wsp x, y, z

$V' \subset \mathbb{R}^3$ – "ta sama" objętość we wsp ξ, η, ζ

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{V'} f\big(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\big)\, J(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

gdzie $J = \left| \det \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right|$ $\blacksquare$