WYKŁAD 11

Na poprzednim wykładzie udowodniliśmy twierdzenie o lokalnej odwracalności: funkcja $f:\mathbb{R}^k \supset O \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1, której pochodna $f'(a) \in L(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^k)$ jest macierzą odwracalną jest w otoczeniu punktu a bijekcją na zbiór otwarty i funkcja odwrotna f^{-1} też jest klasy C^1. Przykładowo $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gdzie $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ spełnia założenia twr. o lokalnej odwracalności we wszystkich punktach $a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Rzeczywiście,

$$\det f'(a) = \det \begin{bmatrix} e^{a_x}\cos(a_y) , & -e^{a_x}\sin(a_y) \\ e^{a_x}\sin(a_y) , & e^{a_x}\cos(a_y) \end{bmatrix} = e^{2a_x} > 0$$

czyli $f'(a)$ jest macierzą odwracalną. Pochodna f^{-1} w punkcie $b = f(a)$ jest odwrotnością $f'(a)$:

$$(\underset{\text{odwrotność funkcji}}{f^{-1}})'(b) = (f'(a))^{\overset{\text{odwrotność macierzy}}{-1}} = \begin{bmatrix} e^{-a_x}\cos(a_y) , & e^{-a_x}\sin(a_y) \\ -e^{-a_x}\sin(a_y) , & e^{-a_x}\cos(a_y) \end{bmatrix}.$$

W notacji zespolonej mamy $z = x+iy$ $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ $= e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy}$. Czy $f'(z) = e^z$? Ale jak to? Wszystko się zgadza! Weźmy liczbę zespoloną $w = u+iv$, $u,v \in \mathbb{R}$. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^2 \ni z \longmapsto w\cdot z \in \mathbb{R}^2$. Jak wygląda macierz tego odwzorowania? $wz = (u+iv)(x+iy) = ux - vy + i(uy+vx) \underset{\text{utożsamienie } \mathbb{Z} \cong \mathbb{R}^2}{\cong} \begin{bmatrix} ux-vy \\ vx+uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ale, moment

$$f'(a_x,a_y) = \begin{bmatrix} e^{a_x}\cos a_y , & -e^{a_x}\sin a_y \\ e^{a_x}\sin a_y , & e^{a_x}\cos a_y \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} u = e^{a_x}\cos a_y = \operatorname{Re} e^a \\ v = e^{a_x}\sin a_y = \operatorname{Im} e^a \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$$

czyli $f'(a)$ jest mnożeniem przez e^a. W tym sensie $f'(a) = e^a$. Podobnie można się przekonać, że $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{b}$

Zazwyczaj $f^{-1}(b) \overset{\text{oznaczamy}}{=\!=} \log b = \log|b| + i\arg b$

Uwaga: lokalny charakter twierdzenia przeja- ②
wia się w tym, że log wymaga doprecyzowania:
który arg b powinniśmy wziąć.
"Gałąź główna logarytmu" definiujemy
jako odwzorowanie odwrotne funkcji
e^z obciętej do z: $\operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi[$. Wówczas
$\log : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \to \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi[\}$
definiujemy wzorem $\log b = |b| + i \operatorname{Arg}(b)$
gdzie $\operatorname{Arg} b \in]-\pi, \pi[$.
Zmieniamy temat naszych rozważań ⇝

TWIERDZENIE O FUNKCJI UWIKŁANEJ (TFU).

Twierdzenie to doprecyzowuje następującą intuicję: Jeśli mamy m równań na $n+m$ niewiadomych to znając n niewiadomych, pozostałe m niewiadomych można wyznaczyć z m równań.
W przypadku równań liniowych można to zilustrować następującym przykładem: Niech $x \in \mathbb{R}^3$ $y \in \mathbb{R}^2$.
Rozważmy sytuację , w której mamy dwa równania liniowe na pięć zmiennych $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3+2} = \mathbb{R}^5$.
Mamy więc
$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{13} x_3 + \tilde{a}_{11} y_1 + \tilde{a}_{12} y_2 = 4$$
$$a_{21} x_1 + \ldots + a_{23} x_3 + \tilde{a}_{21} y_1 + \tilde{a}_{22} y_2 = 1$$

Przepiszmy w postaci macierzowej: $A = [a_{ij}]_{\substack{i \in \{1,2\} \\ j \in \{1,2,3\}}}$
$\tilde{A} = [\tilde{a}_{pq}]_{p,q \in \{1,2\}}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \tilde{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = b \quad (*)$

Zauważmy, że jeśli tylko macierz $\tilde{A} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jest odwracalna to $(*)$ bardzo łatwo da się rozwikłać ze względu na $y \in \mathbb{R}^2$: $\quad y = (\tilde{A})^{-1}(-Ax + b)$.
Problem powyższy ma swoje bardzie skomplikowane wersje.

Na przykład odwzorowanie liniowe $x \mapsto \hat{A}x$ można zastąpić "cokolwiek" $\mathbb{R}^3 \ni x \longmapsto g(x) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy problem $g(x) + \hat{A}y \overset{(**)}{=} b$ rozwiązuje się dając $y = \hat{A}^{-1}(b - g(x))$. Można na $(**)$ popatrzeć jeszcze ogólniej: rozważmy odwzorowanie

$F : \mathbb{R}^{3+2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem $F(x,y) = g(x) + \hat{A} \cdot y$ i ustalmy $b \in \mathbb{R}^2$. Wówczas równanie

$F(x,y) = b$ zadaje y w sposób uwikłany.

Znając x wyznaczamy y. Czyli y jest funkcją x: $y = y(x) = \hat{A}^{-1}(b - g(x))$. No dobrze, to bądźmy najbardziej ogólni i zapytajmy się co trzeba wiedzieć o odwzorowaniu $F : \mathbb{R}^{3+2} \to \mathbb{R}^2$ żeby móc stwierdzić, że $F(x,y) = b$ zadaje y w sposób uwikłany. Na przykład, czy

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x_1^2 y_1 + \exp(x_2^2 + y_1)\sin(x_3) \\ x_3^2 \log(y_1^2 + y_2^2) \cdot tg(x_2 y_1) \end{bmatrix}$$ zadaje y

w sposób uwikłany? Tutaj nie daje się jawnie zależności $F(x,y) = b$ rozwikłać i podać $y = y(x)$. Co nie znaczy, że na powyższe pytanie nie da się odpowiedzieć. Mówi o tym twierdzenie o funkcji uwikłanej. Przypomnijmy/wprowadźmy pomocniczą notację. Niech $F : \mathbb{R}^{n+m} \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^1$ na otwartym zbiorze $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ (poprzednio $n=3$, $m=2$). Wówczas $F'(a) \in M_{m, n+m}(\mathbb{R})$. ($a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.) zapiszemy w notacji blokowo macierzowej $F'(a) = \left[F'_x(x,y), F'_y(x,y)\right]$

gdzie $F'_x(x,y) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
$F'_y(x,y) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

W tej notacji dla przyrostu $h=\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n+m}$ mamy

$$F'(x,y)\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\end{bmatrix} = F'_x(x,y)h_x + F'_y(x,y)h_y =$$

$$= \left[F'_x(x,y),\, F'_y(x,y)\right]\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\end{bmatrix}.$$ Jeśli więc

$$F(x,y)=\begin{bmatrix}F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\end{bmatrix}$$ to $F'_x(x,y)=\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x,y)\right]_{\substack{j\in\{1,\dots,m\}\\ i\in\{1,\dots,n\}}}$

oraz $F'_y(x,y)=\left[\frac{\partial F_j}{\partial y_i}(x,y)\right]_{j,i\in\{1,\dots,m\}}$. Zauważmy, że $F'_y(x,y)$ jest macierzą kwadratową $m\times m$. Jako taka może być odwracalna. Jeśli istnieje to jej odwrotność oznaczamy po prostu $\left[F'_y(x,y)\right]^{-1}\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. Zanim sformułujemy TFU przypuśćmy, że $F(x,y)=b$ zadaje y w sposób uwikłany: $F(x,y(x))=b$. Czy można obliczyć $y'(x)$ z tego równania? Skoro $F(x,y(x))=b=\text{const}$ to pochodna odwzorowania $x\mapsto F(x,y(x))$ jest zero. Z drugiej strony z reguły łańcuchowej mamy $0=F'_x(x,y(x))+F'_y(x,y(x))\cdot y'(x)$. A więc

(*) $$y'(x)=-\left[F'_y(x,y(x))\right]^{-1}F_x(x,y(x)).$$ Czyli nie trzeba znać jawnej postaci y aby zróżniczkować y!!!

Twierdzenie (o funkcji uwikłanej)

Niech $F:\mathbb{R}^{n+m}\supset O\to\mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy C^1 na O. Załóżmy, że $\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}\in O$ oraz $F(x_0,y_0)=b\in\mathbb{R}^m$. Niech $F'_y(x_0,y_0)$ będzie macierzą odwracalną. Istnieją wówczas zbiory otwarte $O_{x_0}\subset\mathbb{R}^n$, $O_{y_0}\subset\mathbb{R}^m$ oraz $y\in C^1(O_{x_0},\mathbb{R}^m)$ takie, że

$\to$ verte

$(x_0, y_0) \in O_{x_0} \times O_{y_0} \subset O \subset \mathbb{R}^{n+m}$, zaś warunek $F(x,y) = b$ dla $(x,y) \in O_{x_0} \times O_{y_0}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $y = y(x)$ dla pewnego $x \in O_{x_0}$.

Ponadto $y'(x) = -\left[F'_y(x, y(x))\right]^{-1} \cdot F'_x(x, y(x))$.

Dowód: (patrz Skrypt prof. Streleckiego p. 65-67)
Przyjmiemy, że $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Krok 1 Odwzorowanie pomocnicze $H : O \to \mathbb{R}^{n+m} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dane wzorem $H(x,y) = (x, F(x,y))$ ma pochodną klasy C^1

$$H'(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n\times n} & O_{n\times m} \\ F'_x(x,y) & F'_y(x,y) \end{bmatrix}.$$ Zauważmy, że

$$\left[H'(x_0, y_0)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n\times n} & O_{n\times m} \\ \left[-F'_y(x_0,y_0)\right]^{-1} F'_x(x_0, y_0) & \left[F'_y(x_0,y_0)\right]^{-1} \end{bmatrix}.$$

W szczególności H spełnia zał. twierdzenia o lokalnej odwracalności: istnieje $K\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, r\right)$ oraz zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ t. że

$$H\Big|_{K\left(\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right], r\right)} : K\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, r\right) \to V \text{ jest bijekcją},$$

odwzorowanie odwrotne $G : V \to K\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, r\right)$ jest klasy C^1. Łatwo sprawdzić, że G ma postać $G(x,y) = (x, \tilde{G}(x,y))$ gdzie $\tilde{G} : V \to \mathbb{R}^m$ (bo H ma taką postać).

Krok 2 Równanie $F(x,y) = 0$ jest dla $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in K\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, r\right)$ spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $H(x,y) = (x, 0) \in V$. Skoro $H = G^{-1}$ to równość $H(x,y) = (x,0)$ spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $(x,y) = G(x,0) = (x, \tilde{G}(x,0))$ czyli wtedy i tylko wtedy gdy $y = \tilde{G}(x,0)$

Definiujemy zatem $y(x)=\tilde{G}(x,0)$; na jakiej dziedzinie? Po pierwsze dobieramy $\rho>0$ tak aby $K(x_0,\rho)\times K(y_0,\rho)\subset K\left(\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}, r\right)$ i tak aby $K(x_0,\rho)\times\{0\}\subset V$ gdzie V dziedzina H^{-1} (w szczególności $\tilde{G}$ jest określone na V). Skoro $\tilde{G}(x_0,0)=y_0$ to istnieje $\tilde{\rho}<\rho$ takie, że dla $x\in K(x_0,\tilde{\rho})$: $y(x)\in K(y_0,\rho)$. Kładąc $O_{x_0}=K(x_0,\tilde{\rho})$ oraz $O_{y_0}=K(y_0,\rho)$ dostajemy tezę naszego twierdzenia.

Wzór $y'(x)=-\left[F'_y(x,y(x))\right]^{-1}\cdot F'_x(x,y(x))$ został wyprowadzony przed dowodem twierdzenia ∎

Uwaga funkcję zadaną w sposób uwikłany można badać ze względu na ekstrema. Punktów krytycznych szukamy rozwiązując dwa równanie

$$\begin{cases} F(x,y)=0 & \text{- 1 równanie skalarnych} \\ F'_x(x,y)=0 & \text{- n - równań skalarnych} \end{cases}$$

gdzie $F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ oraz $y: O_{x_0}\to\mathbb{R}$

Jak badać 2-gą pochodną – kolejny wykład