Rozważmy przykład równania różniczkowego ①
$\dot{x}(t) = -x^2(t)$ z warunkiem początkowym postaci $x(0) = -\frac{1}{c}$ dla pewnego $c>0$.

Czyli biorąc $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ postaci $F(t,x) = -x^2$ nasze zagadnienie początkowe ma postać

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ x(0) = -\frac{1}{c} \end{cases}$$

Sprawdźmy czy spełniony jest warunek z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.

$|F(t,u) - F(t,v)| = |u^2 - v^2| = |u+v||u-v| \leq (|u|+|v|)\cdot|u-v| \leq 2R\,|u-v|$ jeśli zał. dodatkowo, że $|u|, |v| < R$.

Zmodyfikujmy więc nieco funkcję F:

$F_R : \mathbb{R}\times]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$: $F_R(x) = -x^2$

Wtedy F_R spełnia odpowiednie zał. ze stałą $L=2R$. Znajdziemy więc $\varepsilon>0$ i dokładnie jedną funkcję

$x:]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow]-R,R[$ t. że

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x^2(t) \\ x(0) = -\frac{1}{c} \end{cases}$$

Postać x: $x(t) = \frac{1}{t-c}$

$\dot{x}(t) = -\left(\frac{1}{t-c}\right)^2 = -x^2(t)$

Zauważmy, że funkcja $x(t)$ ma osobliwość (2)
w $t=c$. Czyli rozwiązanie, a raczej jego trajektoria, ucieka do $-\infty$ w skończonym czasie.

Przedłużanie rozwiązań równań różniczkowych

Często rozwiązując równanie różniczkowe musimy/możemy przedłużać rozwiązanie ze zbioru $]-\varepsilon+t_0, +\varepsilon+t_0[$ do większego zbioru $]-\varepsilon_1+t_0, \varepsilon_2+t_0[$ gdzie $\varepsilon<\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Pytanie: jak duże mogą być $\varepsilon_1, \varepsilon_2$?

Zdarzają się równania, których rozwiązań nie można przedłużać dowolnie, możemy mieć problemy z osobliwościami, np.

$x(t)=\frac{1}{t-c}$ czyli $\varepsilon_2<c$.

Pytanie: czy przedłużanie jest procedurą jednoznaczną. Tutaj też mogą pojawić się problemy. Rozważmy r-nie różniczkowe

$$(**)\begin{cases} \dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \\ x(0)=0 \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że dla każdego $a>0$ funkcje

$$x(t)=\begin{cases} -(t+a)^2 & t<-a \\ 0 & |t|<a \\ (t-a)^2 & t>a \end{cases}$$

jest rozwiązaniem $(**)$ znikającym wokół zera.

Mamy więc niejednoznaczność przedłużenia.

Definicja: Niech $O \underset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^n$ oraz $F:]a,b[\times O \to \mathbb{R}^n$ (3)
będzie funkcją ciągłą. Mówimy, że F jest lipschitzowska względem drugiej zmiennej jeśli istnieje stała $L > 0$ t. że dla $u, v \in O$ mamy $\|F(t,u) - F(t,v)\| \leq L \|u - v\|$

Stwierdzenie: F - j.w. Niech $x:]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to O$ będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego $(***) \begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Wówczas jeśli x można przedłużyć do rozwiązania $(***)$ na większym przedziale $\mathbb{R} \supset I \supset]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ to można to zrobić tylko na jeden sposób.

Dowód: Przypuśćmy że $(***)$ ma dwa rozwiązania $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}: I \to O$ t. że $x = \tilde{x}|_{]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[} = \tilde{\tilde{x}}|_{]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[}$
Niech $J \subset I$ będzie maksymalnym na którym $\tilde{x}$ i $\tilde{\tilde{x}}$ są równe. Jeśli $J \neq I$ to jeden z końców J (nazwijmy go t_1) należy do I.
Skoro $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}$ są ciągłe to $\tilde{x}(t_1) = \tilde{\tilde{x}}(t_1)$. Rozważmy zagadnienie początkowe

$(*) \begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, x(t)) \\ y(t_1) = \tilde{x}(t_1) \end{cases}$ Ma ono jednoznaczne rozwiązanie na $]t_1-\delta, t_1+\delta[$

Skoro $\tilde{x}|_{]t_1-\delta, t_1+\delta[}$ i $\tilde{\tilde{x}}|_{]t_1-\delta, t_1+\delta[}$ są rozwiązaniami $(*)$ to $\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$ na $J \cup]t_1-\delta, t_1+\delta[$ co jest sprzeczne z maksymalnością J.

<u>Równania różniczkowe liniowe</u> to równania postaci $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ gdzie $A:]a,b[\to M_n(\mathbb{R})$ i $b:]a,b[\to \mathbb{R}^n$.

Jeśli $b \equiv 0$ to mówimy, że równanie jest jednorodne. Zauważmy, że wówczas kombinacja liniowa rozwiązań jest rozwiązaniem.

Gdy $b \neq 0$ to mówimy, że równanie jest niejednorodne.

Twierdzenie Przypuśćmy, że $A:]a,b[\to M_n(\mathbb{R})$ oraz $b:]a,b[\to \mathbb{R}^n$ są odwzorowaniami ciągłymi i ograniczonymi. Wówczas dla dowolnych danych początkowych $(t_0, x_0) \in]a,b[\times \mathbb{R}^n$ zagadnienie początkowe

$$(**)\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ma jednoznaczne globalne (określone na $]a,b[$) rozwiązanie

Dowód Rozważmy równanie $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ gdzie $F(t,x) = A(t)x + b(t)$. Wówczas

$$\|F(t,u) - F(t,v)\| = \|A(t)(u-v)\| \leq \|A(t)\| \, \|u-v\| \leq \sup_{\tau \in]a,b[} \|A(\tau)\| \, \|u-v\| = L\|u-v\|$$

Zatem F jest funkcją lipschitzowską względem 2-giej zmiennej gdzie $L = \sup_{\tau \in]a,b[} \|A(\tau)\|$

Niech ε będzie t. że na odcinku $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ istnieje rozwiązanie (**).

Przypomnijmy, że ε musi spełniać następujące warunki:

$\varepsilon < \frac{1}{L}$ $\varepsilon < \frac{\varrho}{D}$ gdzie ϱ oraz D takie jak w dowodzie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Czyli: ϱ t. że $K(x_0,\varrho) \subset \mathcal{O}$ ale u nas $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ a więc ϱ można więc dowolne.

$$D = \sup_{\substack{\tau \in]a,b[\\ v \in K(x_0,\varrho)}} \|F(\tau,v)\| = \sup_{\tau, v} \|A(\tau)v + b(\tau)\| \leq$$

$$\sup_{v} \|A(\tau)v\| + \sup_{\tau} \|b(\tau)\| \leq L \sup_{v \in K(x_0,\varrho)} \|v\| + C$$

gdzie $L = \sup_{\tau} \|A(\tau)\|$ $C = \sup_{\tau} \|b(\tau)\|$

Zauważmy, że $\sup_{v \in K(x_0,\varrho)} \|v\| = \|x_0\| + \varrho$.

Czyli $D \leq L(\|x_0\| + \varrho) + C$; możemy teraz wskazać ϱ: Weźmy $\varrho = \|x_0\| + C$.

Wtedy $D \leq L\left(\|x_0\| + \|x_0\| + C\right) + C =$

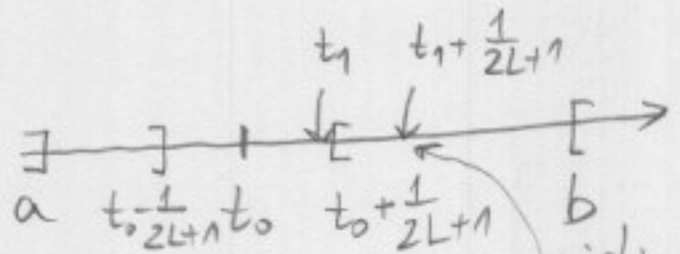
$$= L(2\|x_0\| + C) + C < L(2\|x_0\| + 2C) + C + \|x_0\|$$

$= (\|x_0\| + C)(2L+1)$. Zatem warunek $\varepsilon < \frac{\varrho}{D}$ przyjmuje postać $\varepsilon < \frac{\|x_0\| + C}{D}$ oraz

$\frac{\|x_0\| + C}{D} > \frac{\|x_0\| + C}{(\|x_0\| + C)(2L+1)} = \frac{1}{2L+1}$. Można zatem przyjąć $\varepsilon = \frac{1}{2L+1}$

Co daje powyżej wykonana analiza? Spójrzmy raz jeszcze. Przy dowolnie zadanym warunku początkowym $x(t_0)=x_0$ istnieje rozwiązanie $x(t)$ na $]t_0-\frac{1}{2L+1}, t_0+\frac{1}{2L+1}[\,\cap\,]a,b[$.

Mając rozwiązanie na odcinku wyjściowym $]t_0-\frac{1}{2L+1}, t_0+\frac{1}{2L+1}[$ możemy go rozszerzyć o "$\frac{1}{2L+1}$ w lewo i prawo".



istnieje więc rozwiązanie na powiększonym o $\frac{1}{2L+1}$ odcinku po kilku takich rozszerzeniach dostaniemy rozwiązanie na $]a,b[$. ∎

Rezolwenta / operator ewolucji

Rozważmy jednorodne równanie liniowe $\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)$ gdzie $A:]a,b[\to M_n(\mathbb{R})$ jest ciągła i ograniczona. Dla $(t_0,x_0,t)\in\,]a,b[\times\mathbb{R}^n\times]a,b[$ oznaczmy przez $u(t_0,x_0,t)$ wartość w czasie t (jedynego) rozwiązania zagadnienia

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

Rezolwenta/Op. ewolucji od czasu t_0 do t ⑦
równania $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ nazywamy odwzorowanie $U(t,t_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Własności Operatora ewolucji.

① $\forall t, t_0 \in]a,b[$ $U(t,t_0)$ jest liniowe:

$$U(t,t_0)(\alpha x_0 + \beta \tilde{x}_0) = u(t_0, \alpha x_0 + \beta \tilde{x}_0, t)$$

Czyli $U(t,t_0)(\alpha x_0 + \beta \tilde{x}_0)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$(*) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) y(t) \\ y(t_0) = \alpha x_0 + \beta \tilde{x}_0 . \end{cases}$$

Z drugiej strony, jeśli $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ spełniają $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$

to $\alpha x + \beta \tilde{x}$ spełnia $(*)$. Z jednoznaczności rozwiązań mamy

$$u(t_0, \alpha x_0 + \beta \tilde{x}_0, t) = \alpha x(t) + \beta \tilde{x}(t) = \alpha U(t,t_0)(x_0) + \beta U(t,t_0)(\tilde{x}_0)$$

Widzimy, że $U(t,t_0)$ jest liniowym odwzorowaniem $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(2) $\mathcal{U}(t_0,t_0)=1\!\!1_{n\times n}$ - oczewiste, bo

$$\mathcal{U}(t_0,t_0)(x_0)=u(t_0,x_0,t_0)=x_0=1\!\!1_{n\times n}\,x_0.$$

(3) $\forall_{t,s_0,t_0\in\,]a,b[}\quad U(t,s_0)\,U(s_0,t_0)=U(t,t_0).$

$$\mathcal{U}(t,s_0)\underbrace{U(s_0,t_0)\,x(t_0)}_{\overset{\shortparallel}{x(s_0)}}=U(t,s_0)\,x(s_0)=x(t)=U(t,t_0)\,x(t_0)$$

bo $U(s_0,t_0)\,x(t_0)$ jest wartością rozwiązania w chwili s_0, które w chwili t_0 miało wartość $x(t_0)$.

(4) $U(t,t_0)\in M_n(\mathbb{R})$ - w i-tej kolumnie kolumnie $U(t,t_0)$ stoi rozwiązanie r-nia

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=A(t)\,x_i(t)\\ x_i(t_0)=e_i=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\leftarrow\text{i-ty wiersz.}\end{cases}$$

Zatem $\dfrac{d}{dt}U(t,t_0)=A(t)\,U(t,t_0)$ (*)

Rzeczywiście, tożsamość ta jest spełniona na każdym e_i:

$$\frac{d}{dt}U(t,t_0)\,e_i=\frac{d}{dt}x_i(t)=A(t)\,x_i(t)=$$

$$=A(t)\,U(t,t_0)\,e_i$$ - możne "skrócić" wektory e_i i dostajemy (*)