Przypomnienie

Izolowane punkty osobliwe. przykład $w(z)=\frac{1}{1+z^2}$

osobliwości: $z_1=i$, $z_2=-i$ – zera mianownika

Opisanie każdą funkcję daje się rozwinąć wokół osobliwości w szereg Laurenta. $w(z)$ – holomorficzna, z_0 – pkt osobliwy izolowany

$$w(z)=\underbrace{\ldots+\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}}_{\text{część osobliwa}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots}_{\text{część regularna}}$$

residuum

$$\operatorname*{res}_{z_0} w(z)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varrho} w(z)\,dz$$

Jeśli osobliwość z_0 jest rzędu 1, to mamy

$$w(z)=\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots \qquad \left(\begin{array}{c}a_{-2}=a_{-3}=\ldots=0\\ \& \ a_{-1}\neq 0\end{array}\right),$$

to $a_{-1}=\left.\left(w(z)(z-z_0)\right)\right|_{z=z_0}$ $\Longleftarrow$ $\left.(z-z_0)\cdot w(z)\right|_{z=z_0}=a_{-1}+\underbrace{a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+\ldots}_{\text{dla } z=z_0 \text{ wartość }=0}\Big|_{z=z_0}$ $=a_{-1}$

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0} w(z)(z-z_0)$$

Jeśli z_0 jest rzędu N (biegunem rzędu N) $N\in\{1,2,\ldots\}$

to mamy $w(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$, $a_{-N}\neq 0$

$$a_{-N-1}=a_{-N-2}=a_{-N-3}=\ldots=0$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left(w(z)(z-z_0)^N\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma w(z)\,dz$$

Sprawdźmy $N=3$ (i) $w(z)(z-z_0)^3=a_{-3}+a_{-2}(z-z_0)+a_{-1}(z-z_0)^2+a_0(z-z_0)^3+\ldots$

(ii) $\frac{d^2}{dz^2}w(z)(z-z_0)^3=2a_{-1}+3\cdot 2a_0(z-z_0)^1+4\cdot 3\,a_1(z-z_0)^2+\ldots \xrightarrow[z\to z_0]{} 2a_{-1}$

Przykład. Oblicz residua w punktach osobliwych f-cji $w(z)=\frac{1}{1+z^4}$

zera mianownika: $1+z^4=0$ $\quad z=\sqrt[4]{-1}=\left\{e^{\frac{i\pi}{4}},e^{\frac{3}{4}i\pi},e^{\frac{5}{4}i\pi},e^{\frac{7}{4}i\pi}\right\}$

$$\operatorname*{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} w(z)=\lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}}\frac{z-e^{\frac{i\pi}{4}}}{1+z^4}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}}=\frac{1}{4e^{\frac{3}{4}i\pi}}$$

biegun rzędu 1, bo $\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{(z-e^{\frac{i\pi}{4}})\underbrace{(z-e^{\frac{3}{4}i\pi})(z-e^{\frac{5}{4}i\pi})(z-e^{\frac{7}{4}i\pi})}_{\neq 0 \text{ dla } z=e^{\frac{i\pi}{4}}}}$

odwrotność ilorazu różnicowego

$$\operatorname*{res}_{z=e^{\frac{i3\pi}{4}}} w(z)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3}{4}i\pi}}=\frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}}}$$

Rachunek res...

Obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

Dobieramy funkcję $w(z) = \frac{1}{1+z^4}$ i kontur całkowy Γ_R

$$\int_{\Gamma_R} w(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{e^{\frac{\pi}{4}i}} w(z) + \operatorname{res}_{e^{\frac{3}{4}\pi i}} w(z)\right) = 2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4e^{\frac{3}{4}i\pi}} + \frac{1}{4e^{\frac{9}{4}i\pi}}\right)$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{\frown} w(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{4}} = \pi\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\frown} w(z)\,dz = \begin{cases} z = Re^{i\varphi} \\ \varphi\in[0,\pi] \\ dz = Re^{i\varphi}i\,d\varphi \end{cases} = \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\varphi}i\,d\varphi}{1+R^4e^{4i\varphi}} \sim \frac{\text{Const}}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Koniec przykładu

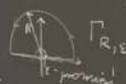
Ogólniej: Jeśli $Q(z)$ jest funkcją wymierną, której osobliwości $\notin \mathbb{R}$ taką, że $z\cdot Q(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ to $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{\operatorname{Im} z_j > 0 \\ z_j \text{ osobliwości } Q(z)}} \operatorname{res}_{z_j} Q(z)$.

t. hol $Q(z)$ konturu

Przykład $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ – metoda rach. res

"Problem": $\frac{\sin(x)}{x}$ nie ma elementarnej funkcji pierwotnej

- funkcja holomorficzna $w(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ $z_0 = 0$ - osobliwe.
- kontur całkowy



$\Gamma_{R,\varepsilon} = [-R,-\varepsilon]\cup[R,\varepsilon]\cup\varepsilon\text{-Łuk}\cup R\text{-Łuk}$

$$0 = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \underbrace{\int_{\varepsilon\text{-Łuk}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{\mathrm{I}_\varepsilon} + \underbrace{\int_{R\text{-Łuk}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{\mathrm{II}_R} \to 0$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{-x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \underset{\substack{\downarrow \varepsilon\to 0 \\ -i\pi}}{\mathrm{I}_\varepsilon} + \underset{\substack{\downarrow R\to\infty \\ 0}}{\mathrm{II}_R} \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}]{} 2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi = 0.$$

$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx + \mathrm{I}_\varepsilon + \mathrm{II}_R.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_\varepsilon = \begin{cases} z = \varepsilon e^{i\varphi} \\ \varphi\ \pi\to 0 \\ dz = \varepsilon e^{i\varphi} i\,d\varphi \end{cases} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \lim_{\varepsilon\to 0} i\cdot\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\,d\varphi = -i\pi.$$

Lemat Jordana: $a > 0$ $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ określona na

Wówczas $\lim_{R\to\infty} \int_{\frown R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0$.

Kładąc $f(z) = \frac{1}{z}$ & $a = 1 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \mathrm{II}_R = 0$.

$$= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{-x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \underset{\substack{\downarrow \varepsilon\to 0\\ -i\pi}}{I_\varepsilon} + \underset{\substack{\downarrow R\to\infty\\ 0}}{II_R}$$

$$2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx + I_\varepsilon + II_R \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} 2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \left\{\begin{array}{l} z = \varepsilon e^{i\varphi} \\ \varphi: \pi \to 0 \\ dz = \varepsilon e^{i\varphi} i\,d\varphi \end{array}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} i\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\,d\varphi = -i\pi.$$

Lemat Jordana. $a > 0$, $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ określona na

Wówczas $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0.$

Kładąc $f(z) = \frac{1}{z}$ & $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty} II_R = 0.$

$$\left|\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz\right| = \left\{\begin{array}{l} z = Re^{i\varphi} \\ dz = Re^{i\varphi} i\,d\varphi \end{array}\right\} = \left|\int_0^{\pi} \underbrace{e^{iaRe^{i\varphi}}}_{e^{iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}} f(Re^{i\varphi})\, Re^{i\varphi} i\,d\varphi\right| =$$

$$\le \sup_{\varphi\in[0,\pi]} \left|f(Re^{i\varphi})\right| R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi = 2 \sup_{[0,\pi]} \left|f(Re^{i\varphi})\right| R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \le$$

$\frac{2}{\pi}\cdot\varphi$

$$2 \sup_{[0,\pi]} \left|f(Re^{i\varphi})\right| \cdot R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\,d\varphi = 2 \underbrace{\sup_{[0,\pi]} \left|f(Re^{i\varphi})\right|}_{\downarrow R\to\infty \atop 0} \underbrace{\frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aR}\right)}_{\downarrow R\to\infty \atop \frac{\pi}{a}}$$

$$\left|\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$