Wykład 16 RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE C.D. ①

PRZYPOMNIENIE Rezolwenta równania różniczkowego liniowego $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ zadaje ewolucję rozwiązania różniczkowe, które w chwili to przyjmuje wartość x_0. Dokładniej, jeśli $U(t,t_0)$ jest operatorem ewolucji dla $t_0, t \in]a,b[$ to $x(t) = \underbrace{U(t,t_0)}_{\text{macierz } n\times n \text{ zależna od } t \text{ i } t_0} x_0 \leftarrow$ wektor n-wymiarowy

Co stoi w kolumnach macierzy $U(t,t_0)$

W pierwszej kolumnie mamy rozwiązanie zagadnienia początkowego $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \\ x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$

W drugiej kolumnie warunek początkowy ma postać $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ a w ostatniej ma postać $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Ponadto $U(t,t_0)$ jest rozwiązaniem macierzowego zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t,t_0) = A(t)\,U(t,t_0) \\ U(t_0,t_0) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Przykład 1 $A(t) = A(t_0) = A$

Wówczas $U(t,t_0) = e^{(t-t_0)A} \overset{\text{zbieżny szereg macierzowy}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k A^k}{k!}$

Rzeczywiście $U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k =$$

Czyli $\frac{d}{dt} U(t,t_0) = A\, U(t,t_0)$

Przykład 2

Jeśli dla $\tau_1, \tilde{\tau}_2 \in [t_0, t]$ $A(\tau_1) A(\tilde{\tau}_2) = A(\tilde{\tau}_2) A(\tau_1)$

to $\mathcal{U}(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau}$.

Rzeczywiście $\mathcal{U}(t_0,t_0) = \mathbb{1}$. Ponadto

$\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau}$ przy założeniu $A(\tau_1) A(\tilde{\tau}) = A(\tilde{\tau}) A(\tau)$

możemy obliczyć następująco.

$$\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt} \overbrace{\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \dots \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \right)}^{k\text{-razy}}$$

Zauważmy teraz, że dla $k=2$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \right) = A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \, A(t)$$

$$= A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau) A(t) d\tau = 2 A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau.$$

Podobnie $\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \dots \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau}_{k\text{-razy}} = k A(t) \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \right)^{k-1}$.

Zatem

$$\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau} = \sum \frac{1}{(k-1)!} A(t) \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau) \right]^{k-1} = A(t) e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau}$$

Wnioskujemy więc, że $\mathcal{U}(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau}$

<u>Przykład 3</u> Wzór na rezolwentę w najogólniejszej sytuacji ma postać

$$\mathcal{U}(t,t_0) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{t}^{t_0} \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_1) A(\tau_2) A(\tau_3) \dots$$

Przykład: skalarne równanie liniowe (3)

$\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ wtedy $\mathcal{U}(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$

czyli $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Jak rozwiązać równanie skalarne postaci:

$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$? $(*)$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ ma postać

$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$. x_0 - stała z zagadnienia początkowego.

Rozwiązanie $(*)$ szukamy w postaci:

$x(t) = y(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ - metoda uzmienniania stałej $x_0 \rightsquigarrow y(t)$

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + y(t)\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} =$$

$$= \dot{y}(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + a(t)\underbrace{y(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}}_{x(t)} =$$

$$= \dot{y}(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + a(t)x(t) \overset{(*)}{=} b(t) + a(t)x(t)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t)$$ - równanie o rozdzielonych zmiennych.

$$y(t) = \int e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t) dt$$

Metoda uzmienniania stałej w n-wym.
liniowym równaniu różniczkowym.

(**) $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ $\quad A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$.

Niech $\mathcal{U}(t, t_0)$ będzie rezolwentą dla równania jednorodnego $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

Rozwiązania (**) mają postać $x_N(t) = x_s(t) + x_J(t)$

gdzie x_s jest jakimś rozwiązaniem (<u>rozwiązaniem szczególnym</u>) równania niejednorodnego a $x_J(t)$ rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego czyli

terminologia

$x_J(t) = \mathcal{U}(t, t_0)x_0$.

Postulujemy następującą postać x_s i szukamy $y(t)$:

$x_s(t) = \mathcal{U}(t, t_0)y(t)$

wstawiamy x_s do równania (**)

$$\dot{x}_s(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{U}(t,t_0)y(t) = \cancel{A(t)\mathcal{U}(t,t_0)y(t)} + \mathcal{U}(t,t_0)\dot{y}(t) = \cancel{A(t)\mathcal{U}(t,t_0)y(t)} + b(t)$$

$$= A(t)x_s(t) + b(t)$$

Zatem $\mathcal{U}(t,t_0)\dot{y}(t) = b(t)$ i $\dot{y}(t) = \mathcal{U}(t_0,t)b(t)$

czyli $y(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}(t_0,\tau)b(\tau)\,d\tau$ oraz.

$$x_s(t) = \mathcal{U}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\mathcal{U}(t_0,\tau)b(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\mathcal{U}(t,t_0)\mathcal{U}(t_0,\tau)b(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\mathcal{U}(t,\tau)b(t)$$

Wzór Liouville'a

Rozważmy równanie liniowe jednorodne

$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ $\quad A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Naszym celem będzie obliczanie wyznacznika operatora ewolucji $d(t) = \det \mathcal{U}(t,t_0)$.

Oznaczmy $U(t) \equiv \mathcal{U}(t,t_0)$. Skoro $\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t,t_0) = A(t)\mathcal{U}(t,t_0)$

to $U(t+h) = U(t) + hA(t)U(t) + o(h)$ gdzie $\frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Poniżej $o(h)$ będzie oznaczać małą rzędu h.

W szczególności

$$\det U(t+h) = \det\big(U(t) + hA(t)U(t) + o(h)\big) =$$

$$= \det\big((\mathbb{1} + hA(t) + \underbrace{o(h)U^{-1}(t)}_{o(h)})\,U(t)\big)$$

$$= \det\big(\mathbb{1} + hA(t) + o(h)\big)\det\big(U(t)\big)$$

Niech $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{n1}(t), & \dots, & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ Wówczas

$$\det(\mathbb{1} + hA(t) + o(h)) = \left\{ \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k\neq l \end{cases} \right\}$$

$$= \sum_{\sigma \in Perm(n)} \operatorname{sgn}\sigma \left(\prod_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(i)} + h\, a_{i,\sigma(i)}(t) + o(h) \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in Perm(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\delta_{i\sigma(i)} + h\, a_{i\sigma(i)}(t) + o(h) \right)$$

Jeśli $\sigma \neq id$ to istnieje $k: \sigma(k) \neq k$ wtedy dla $l = \sigma^{-1}(k)$ mamy $k \neq \sigma^{-1}(k) = l$ oraz

$\sigma(l) = k \neq \sigma^{-1}(k) = l \Rightarrow \sigma(l) \neq l$.

Podsumowując dla $\sigma \neq id$:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)} + h\, a_{i,\sigma(i)}(t)\right) = \prod_{i\neq k,l}\left(\delta_{i,\sigma(i)} + h\, a_{i,\sigma(i)}(t)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\underset{0}{\underset{\parallel}{\delta_{k,\sigma(k)}}} + h\, a_{k,\sigma(k)}(t)\right)\left(\underset{0}{\underset{\parallel}{\delta_{l,\sigma(l)}}} + h\, a_{l,\sigma(l)}(t)\right) =$$

$$= h^2 a_{k\sigma(k)} a_{l,\sigma(l)} \prod_{i\neq k,l}\left(\delta_{i\sigma(i)} + h\, a_{i\sigma(i)}(t)\right) = o(h).$$

Tak więc

$$\det(\mathbb{1} + hA(t) + o(h)) = \prod_{i=1}^{n}(1 + h\, a_{ii}(t)) = (1 + h \operatorname{Tr} A(t) + o(h))$$

$$1 + h(a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)) + o(h) = (1 + h \operatorname{Tr} A(t)) \det(U(t)) + o(h)$$

czyli $\det(U(t+h)) = (1 + h \operatorname{Tr} A(t)) \det(U(t))$

stąd $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\det U(t+h) - \det(U(t))}{h} = \operatorname{Tr} A(t) \det(U(t))$

Zatem $\det U(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego $\begin{cases} \dot d(t) = \operatorname{Tr}(A(t))\, d(t) \\ d(t_0) = 1 \end{cases}$

czyli $d(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(A(\tau))\, d\tau$.

Równanie liniowe liniowe jednorodne rzędu n

Rozważmy równanie $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}(t)$ na funkcję $x:]a,b[\to \mathbb{R}$. Zamieniamy je na równanie pierwszego rzędu na funkcję o wartościach w $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Rozważmy zatem równanie różniczkowe na $y:]a,b[\to \mathbb{R}^n$ postaci $\dot{y}(t) = A(t)\, y(t)$ $(*)$

Jeśli $\mathcal{U}(t,t_0)$ jest rezolwentą $(*)$ to kolumny $\mathcal{U}(t,t_0)$ (oznaczmy je $u_1, \dots, u_n$) są bazą przestrzeni rozwiązań $(*)$. Mamy więc

$$v_i(t) = \begin{bmatrix} f_i(t) \\ f_i'(t) \\ \vdots \\ f_i^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } v_i(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ty wiersz}$$

oraz $\{f_1, \dots, f_n\}$ jest bazą równania $\leftarrow$ fundamentalny układ rozwiązań.

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)}(t)$$

W szczególności $\mathcal{U}(t,t_0) = \begin{bmatrix} f_1(t), & \dots, & f_n(t) \\ f_1'(t) & & \\ f_1^{(n-1)}(t), & \dots, & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$

oraz ze wzoru Liouville

$$\det \mathcal{U}(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(\tau)\, d\tau} = e^{\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)\, d\tau}.$$

Uzmiennianie stałej dla równań liniowych wyższych rzędów:

Przykład

Rozważmy równanie liniowe niejednorodne rzędu n

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)}(t) + b(t) \quad (**)$$

Niech $f_1, \dots, f_n$ będzie układem fundamentalnym rozwiązań równania jednorodnego

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)}(t)$$

8

Rozwiązanie (**) jest postaci.

$$x_N(t) = x_J(t) + x_s(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) + x_s(t)$$

x_s jest rozwiązaniem szczególnym (**) którego postaci dekretujemy

$$x_s(t) = c_1(t) f_1(t) + \ldots + c_n(t) f_n(t)$$

$$\dot{x}_s(t) = \dot{c}_1(t) f_1(t) + \ldots + \dot{c}_n(t) f_n(t) + c_1(t) \dot{f}_1(t) + \ldots + c_n(t) \dot{f}_n(t)$$

$$\dot{c}_1(t) f_1(t) + \ldots + \dot{c}_n(t) f_n(t) = 0$$

Postulat 2

$$\ddot{x}_s(t) = \dot{c}_1(t) \dot{f}_1(t) + \ldots + \dot{c}_n(t) \dot{f}_n(t) + c_1(t) \ddot{f}_1(t) + \ldots + c_n(t) \ddot{f}_n(t)$$

$$\dot{c}_1(t) \dot{f}_1(t) + \ldots + \dot{c}_n(t) \dot{f}_n(t) = 0$$

Postulat 3

i t d

$$x_s^{(n-1)}(t) = c_1(t) f_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n(t) f_n^{(n-1)}(t)$$

I w końcu

$$x_s^{(n)}(t) = \dot{c}_1(t) f_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \dot{c}_n(t) f_n^{(n-1)}(t) + c_1(t) f_1^{(n)}(t) + \ldots + c_n(t) f_n^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x_s^{(i)}(t) + b(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \sum_{j=1}^{n} c_j(t) f_j^{(i)}(t) + b(t)$$

A więc $\dot{c}_1(t) f_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \dot{c}_n(t) f_n^{(n-1)}(t) = b(t)$ 9

bo np. $c_1(t) f_1^{(n)}(t) + \ldots + c_n(t) f_n^{(n)}(t) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) f_j^{(i)}(t).$$

Ostatecznie dostajemy równanie.

$$\begin{bmatrix} f_1, \ldots, f_n \\ \dot{f}_1 \ldots \dot{f}_n \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \ldots f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$ i ostatecznie

$\mathcal{U}(t, t_0)$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}(t_0, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix} d\tau.$$