Wstęp/motywacja.

(Źródło: Paweł Strzelecki Skrypt wykładu z Analizy mat I)

Równanie ciepła dim = 1.

Rozważmy odcinek $I=[0,\pi]$.

Temperatura w chwili $t \geq 0$ w punkcie $x \in I$ to wartość funkcji $u(x,t)$. Równanie ciepła w dim = 1:

$$\partial_t u = \partial^2_{xx} u \qquad x \in (0,\pi) \quad t>0$$

Warunki początkowo-brzegowe:

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ – brzegi pręta "wbite w lód"

$u(x,0) = f(x)$ – początkowy rozkład temp.

Zauważmy, że $\forall n = 1, 2, \ldots$ funkcje $u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \sin(nx)$ spełnia warunek brzegowy $u_n(0,t) = u_n(\pi, t) = 0$.

W szczególności funkcje postaci $u(x,t) = \sum b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$ - spełniają war. brzegowy i $\partial_t u = \partial^2_{xx} u$. Jeśli rozkład początkowy jest postaci $f(x) = \sum b_n \sin(nx)$ to rozwiązanie zagadnienie początkowo-brzegowego jest dane wzorem

$$u(x,t) = \sum_n b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Jak rozwinąć: $f(x) = \sum_n b_n \sin(nx)$?

$$\underbrace{\text{Jak rozwinąć}}_{\text{znajdź } b_n}$$

Uwaga: jeśli $g(x) = \overbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx}^{\text{? zbieżne jednostajnie ?}}$

to

$$(*) \begin{cases} a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx & m = 0, 1, 2, \ldots \\ b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx. \end{cases}$$

Dowód (*):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) \, dx = \frac{a_0}{2} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx}^{= 0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos(nx) \sin(mx) + b_n \sin(nx) \sin(mx) \right) dx$$

$$= b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\,dx = \pi b_m$$

Korzystamy ze wzorów

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \pi\delta_{n,m} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = 0.$$

Jak wiadomo $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ jest porządną funkcją.

Wsp. Fouriera

$f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) - funkcje całkowalne

nty wsp. Fouriera

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Szereg Fouriera f to szereg:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

Nta suma częściowa

$$S_n f(x) = \sum_{-N}^{+N} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

Lemat Riemanna-Lebesgue'a

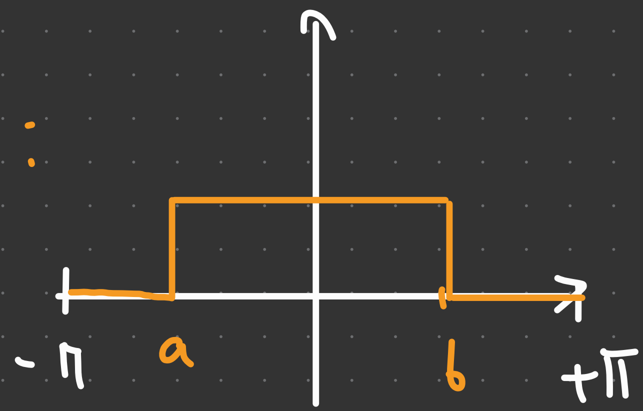
$$\hat{f}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dowód: Wystarczy sprawdzić dla

funkcji charakterystycznej $f = \chi_{[a,b]}$
gdzie $[a,b] \subset [-\pi, \pi]$ oraz

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Wykres $\chi_{[a,b]}$:



Jeśli lemat jest prawdziwy dla $\chi_{[a,b]}$
to jest on prawdziwy dla funkcji
schodkowych .

A jak dla funkcji schodkowych to dla funkcji dających się przybliżać schodkowymi:

Weźmy więc $\hat{\chi}_{[a,b]}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]}(x) e^{-inx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-in}\left(e^{-ina} - e^{-inb}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\blacksquare$

Wzór na N-tą sumę częściową

$$(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \hat{f}(n) e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{+N}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{-N}^{N} e^{in(x-y)}} f(y)\, dy$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} D_N(x-y) \cdot f(y)\, dy$$

gdzie $D_N(s) = \sum_{n=-N}^{n=+N} e^{ins} = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} & s \neq 0. \\ 2N+1 & s = 0 \end{cases}$

Zbieżność punktowa D_N:

jeśli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 2π okresowa i

1) różniczkowalna w sposób ciągły na $\mathbb{R}$.

$$(S_N f)(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} f(x).$$

2) 2 krotnie różniczkowalne w sposób ciągły na $\mathbb{R}$ to

$S_N f(x)$ zbiega jednostajnie do $f(x)$.

Dowód (1)

$$f(x) - S_N f(x) = f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\, dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f(x-y) \right] \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x) - f(x-y)}{-y} \cdot \frac{y}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}}_{\text{funkcja ciągła w } y=0} \cdot \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) y \, dy \quad (*)$$

Z lematu Riemanna-Lebesgue'a wyrażenie (*) $\longrightarrow 0$ przy $N \to \infty$. $\blacksquare$

Dowód (2) wynika z następującego faktu:

Fakt: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-okresowe, różniczkowalne, $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ciągła. Wówczas $\widehat{f'}(n) = in\,\hat{f}(n)$

Dowód: $2\pi\,\widehat{f'}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx \overset{\text{częściowo}}{=}$

$$\underbrace{f(x)\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} = 2\pi\, in\, \hat{f}(n).$$

Dowód(2): Jeśli f'' istnieje i jest ciągłe to $\widehat{f''}(n) = (in)\cdot \widehat{f'} = -n^2 \hat{f}(n)$.

Skoro $|\widehat{f''}(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x) e^{-inx}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx}_{= K}$

to $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{n^2}\cdot K$ & $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.

W szczególności szereg funkcyjny

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{+inx}$ jest zb. jednostajnie

z kryt. Weierstrassa i jego granicą

jest $f(x)$ z punktu (1).