Metoda uzmienniania stałych, przykład

Rozważmy równanie różniczkowe skalarne rzędu 2: $\ddot{x} + a^2 x = b(t)$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$\ddot{x} + a^2 x = 0$ a nie zależy od czasu t

Szukamy rozwiązań postaci $x(t) = e^{\lambda t}$ $\lambda \in \mathbb{C}$

$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ wstawiamy do równanie

$(\lambda^2 + a^2) e^{\lambda t} = 0$ zatem $\lambda = \pm i a$

$x_1(t) = e^{iat}$, $x_2 = e^{-iat}$ - fundamentalny układ rozwiązań? Nie bo te funkcje są zespolone.

$\mathrm{Re}\, x_1(t) = \cos(at)$ $\mathrm{Im}\, x_1(t) = \sin(at)$

$\cos(at)$, $\sin(at)$ jest bazą rozwiązań

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$\ddot{x} + a^2 x = 0$ ma postać

$x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at)$

Zanim przejdziemy do uzmienniania stałych

Zauważmy, że ① $\cos(at)\big|_{t=0} = 1$, $\frac{d}{dt}\cos(at)\big|_{t=0} = -a\sin(at)\big|_{t=0} = 0$.

② $\frac{1}{a}\sin(at)\big|_{t=0} = 0$, $\frac{d}{dt}\frac{1}{a}\sin(at) = \cos(at)\big|_{t=0} = 1$

czyli $\left(\cos(at), \frac{1}{a}\sin(at)\right)$ jest fundamentalnym układem rozwiązań

Ze wzoru Liouville'a

$$\det\begin{bmatrix} \cos(at) & , \frac{1}{a}\sin(at) \\ \dot{\cos}(at) & , \frac{1}{a}\dot{\sin}(at) \end{bmatrix} = e^{\int_{t_0}^{t} a_1(t)dt} = \left\{ \begin{matrix} \ddot{x} = a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x \\ a_1(t) = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= 1 = \det\begin{bmatrix} \cos(at) & , \frac{1}{a}\sin(at) \\ -a\sin(at) & , \cos(at) \end{bmatrix} = \cos^2(at) + \sin^2(at)$$

Czyli zgadza się!

Przejdźmy do uzmienniania stałych.

Poszukujemy rozwiązania szczególnego r-nia niejednorodnego (RSRNJ) postaci

$$x(t) = c_1(t)\cos(at) + c_2(t)\sin(at)$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\dot{c}_1(t)\cos(at) + \dot{c}_2(t)\sin(at)}_{=0 \text{ - przyjmujemy dod. war. na } c_i} - c_1(t)\cdot a\sin(at) + c_2(t) a\cos(at)$$

$$\ddot{x}(t) = \underbrace{-\dot{c}_1(t)\, a\sin(at) + \dot{c}_2(t)\, a\cos(at) - c_1(t)a^2\cos(at) - c_2(t)a^2\cos(at)}_{\ddot{x}(t)}$$

$$+ \underbrace{a^2 c_1(t)\cos(at) + a^2 c_2(t)\sin(at)}_{a^2 x(t)}$$

$$= b(t)$$

czyli
$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)\cos(at) + \dot{c}_2(t)\sin(at) = 0 \\ -a\dot{c}_1(t)\sin(at) + a\dot{c}_2(t)\cos(at) = b(t) \end{cases}$$

Czyli w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \cos(at), & \sin(at) \\ -a\sin(at), & a\cos(at) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a\cos(at) & -\sin(at) \\ a\sin(at), & a\cos(at) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -\sin(at)b(t) \\ \cos(at)\, b(t) \end{bmatrix}$$

Czyli $\dot{c}_1(t) = -\frac{1}{a}\sin(at)\, b(t)$

$c_2(t) = \frac{1}{a}\cos(at)\, b(t)$.

Są to równania liniowe o rozdzielonych zmiennych. $c_1(t) = \frac{-1}{a}\int_0^t \sin(a\tau)\, b(\tau)\, d\tau$

$$c_2(t) = \frac{1}{a}\int_0^t \cos(a\tau)\, b(\tau)\, d\tau.$$

Uwaga na temat rozwiązywaniu równania liniowego rzędu n o stałych współczynnikach. Rozważmy równanie:

$$(*)\quad x^{(n)} + b_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + b_1\dot{x} + b_0 x = 0 \qquad b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Szukamy rozwiązań postaci $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Wstawiając do $(*)$ dostajemy równanie wielomianowe na λ.

$$(**)\quad \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

Jeśli λ_0 jest rzeczywistym k-krotnym pierwiastkiem równania (**) to funkcje (4)

$$e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (*).

l-krotny zespolony pierwiastek (**) $\mu=\mu_1+i\mu_2$ prowadzi do $2l$ lnz rozwiązań równania (*) postaci

$$e^{\mu_1 t}\cos(\mu_2 t), te^{\mu_1 t}\cos(\mu_2 t), \dots, t^{l-1}e^{\mu_1 t}\cos(\mu_2 t)$$
$$e^{\mu_1 t}\sin(\mu_2 t), te^{(\mu_1 t)}\sin(\mu_2 t), \dots, t^{l-1}e^{\mu_1 t}\sin(\mu_2 t).$$

Zauważmy, że jeśli λ_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(\lambda)$ to

$W(\lambda_0)=W'(\lambda_0)=\dots=W^{(k-1)}(\lambda_0)$.

Rozważmy na przykład $k=2$. $n=3$.

$$x'''+b_2x''+b_1x'+b_0=0.$$
$$\lambda^3+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0=W(\lambda)$$
$$W(\lambda_0)=0$$
$$W'(\lambda_0)=3\lambda_0^2+2b_2\lambda_0+b_1=0$$

$$\left(te^{\lambda_0 t}\right)'=\lambda_0 te^{\lambda_0 t}+e^{\lambda_0 t}$$
$$\left(te^{\lambda_0 t}\right)''=\lambda_0^2 te^{\lambda_0 t}+2\lambda_0 e^{\lambda_0 t}$$
$$\left(te^{\lambda_0 t}\right)'''=\lambda_0^3 te^{\lambda_0 t}+3\lambda_0^2 e^{\lambda_0 t}$$

Wstawiając do równania $\Rightarrow$

$$te^{\lambda_0 t}\underbrace{\left(\lambda_0^3+b_2\lambda_0^2+b_1\lambda_0+b_0\right)}_{W(\lambda_0)}+\underbrace{\left(3\lambda_0^2+2b_2\lambda_0+b_1\right)}_{W'(\lambda_0)}e^{\lambda_0 t}=0$$

Podobnie można sprawdzić, że jeśli λ_0 jest rozwiązaniem (pierwiastkiem) k-krotnym równania charakterystycznego

$\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0\lambda_0 = W(\lambda)$ to funkcje postaci $t^j e^{\lambda_0 t}$ spełniają równanie różniczkowe $x^{(n)} + b_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + b_1\dot{x} + b_0 = 0$ (*)

Weźmy $t^j e^{\lambda_0 t}$

$$\left(t^j e^{\lambda_0 t}\right)' = \lambda_0 t^j e^{\lambda_0 t} + j t^{j-1} e^{\lambda_0 t}$$

$$\left(t^j e^{\lambda_0 t}\right)'' = \lambda_0^2 t^j e^{\lambda_0 t} + j 2 t^{j-1} \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + 2j(j-1) t^{j-2} e^{\lambda_0 t}$$

i t.d. Wstawiając do (*) mamy

$$t^j e^{\lambda_0 t}\underbrace{\left(\lambda_0^n + b_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \ldots + b_0\right)}_{W(\lambda)} + j t^j e^{\lambda_0 t}\underbrace{\left(n\lambda_0^{n-1} + \ldots + 2b_2\lambda_0 + b_1\right)}_{W'(\lambda_0)} +$$

$$j(j-1)\, t^{j-2} e^{\lambda_0 t}\, W''(\lambda_0) + \ldots = 0.$$

Metoda przewidywania rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Użytecznym jest w tym przypadku formalizm zespolony. Rozważmy więc zespolone r-nie skalarne $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(n)} + b(t)$ gdzie

$b(t) = e^{\lambda t} P_\ell(t)$ oraz $P_\ell(t) = \sum_{m=0}^{\ell} p_m t^m$

6

Rozważmy dwa przypadki:

1 λ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego $\lambda^n \neq \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ $W(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$

W tym przypadku szukamy RSRNJ postaci $e^{\lambda t} Q(t) = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^{\ell} q_m t^m$ (*)

uogólniając rachunki ze strony 5 $\rightsquigarrow$

$$\frac{d^j}{dt^j} e^{\lambda t} t^m = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \lambda^{j-k} \frac{d^k}{dt^k} t^m =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\min(m,j)} \frac{j!}{(j-k)!\,k!} \frac{m!}{(m-k)!} \lambda^{j-k} t^{m-k} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\min(m,j)} \binom{m}{k} \frac{j!}{(j-k)!} \lambda^{j-k} t^{m-k}$$

Z drugiej strony $W(z) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ spełnia

$$W^{(j)}(z) = \frac{n!}{(n-j)!} z^{n-j} - \sum_{k=j}^{n-1} a_k \frac{k!}{(k-j)!} z^{k-j}$$

Podstawiając (*) do $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} + e^{\lambda t} P_\ell(t)$

dostajemy $\{a_n = 1\}$

$$\sum_{m=0}^{\ell} p_m t^m = -\sum_{m=0}^{\ell} q_m \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{\min(m,j)} \binom{m}{k} \frac{j!}{(j-k)!} \lambda^{j-k} t^{m-k}$$

$$= -\sum_{m=0}^{l} q_m \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{k} t^{m-k} \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!} \lambda^{j-k} = \sum_{m=0}^{l} q_m \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{m}{k} t^{m-k} F^{(k)}(\lambda)$$

czyli dostajemy układ równań:

UWAGA ZMIANA OZNACZENIA: wielomian charakterystyczny W oznaczany jest F!!!!

$$\begin{cases} F(\lambda) q_l = p_l \\ F(\lambda) q_{l-1} + \binom{l}{1} F'(\lambda) q_l = p_{l-1} \\ \vdots \\ F(\lambda) q_0 + F'(\lambda) q_1 + \ldots + F^{(l)}(\lambda) q_l = p_0 \end{cases}$$

Skoro $F(\lambda) \neq 0$ to powyższe ma jednoznaczne rozwiązanie.

Jeśli λ jest pierwiastkiem $W(\lambda) = 0$ krotności n_λ to rozwiązanie znajdujemy postaci $t^{n_\lambda} e^{\lambda t} \sum_{m=0}^{l} q_m t^m$.