Całka Riemanna na $\mathbb{R}^n$

Fakt $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ - funkcja ciągła $(f(x,y)\in\mathbb{R})$

Wówczas $\int_c^d dy\left(\int_a^b dx\, f(x,y)\right) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)$

↑ całka z parametrem y ↖ całka z paramet. x.

Dowód: Niech $c\le\eta\le d$: $F_1(\eta) := \int_c^\eta dy \int_a^b dx\, f(x,y)$

$$\frac{d}{d\eta}F_1(\eta) = \int_a^b dx\, f(x,\eta).$$

Rozważmy teraz funkcję $F_2(\eta) = \int_a^b dx \int_c^\eta dy\, f(x,y)$

↑ całka z par. η

$$\frac{d}{d\eta}F_2(\eta) = \frac{d}{d\eta}\int_a^b dx \int_c^\eta dy\, f(x,y) =$$

$$= \int_a^b dx \frac{d}{d\eta}\int_c^\eta dy\, f(x,y) = \int_a^b dx\, f(x,\eta)$$

Czyli $(F_1 - F_2)'(\eta) = 0$. Ponadto $F_1(c) = F_2(c) = 0$

a stąd $F_1(\eta) = F_2(\eta)$ dla $\eta\in[c,d]$

Innymi słowy $\underset{\eta=d}{\uparrow}$ $\int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)$

Na najbliższych kilku wykład rozwiniemy teorię całki w n wymiarach. W teorii tej udowodnimy, że $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\left(\int_c^d dy\, f(x,y)\right) =$

$$= \int_c^d dy\left(\int_a^b dx\, f(x,y)\right)$$ - twierdzenie Fubiniego.

Definicja Zbiór $D \subset \mathbb{R}^n$ postaci
$D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ nazywamy przedziałem domkniętym w $\mathbb{R}^n$

Niech $\pi_1=(P_{11},\ldots,P_{1n_1})$ będzie podziałem odcinka $[a_1,b_1]$: $P_{11}=[a_1,t_1]$, $P_{12}=[t_1,t_2]$, …, $P_{1n_1}=[t_{n_1-1},b]$

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_{n_1-1}<t_{n_1}=b$$

Podobnie, niech dla $l\in\{1,\ldots,n\}$ dany będzie podział π_l odcinka $[a_l,b_l]$.

$$\pi_l=(P_{l1},\ldots,P_{ln_l}).$$

Podziały $\pi_1,\ldots,\pi_l$ definiują podział π odcinka $D=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ który składa się z odcinków zawartych w D, będących postaci

$$P_{1k_1}\times P_{2k_2}\times\ldots\times P_{nk_n} \quad \text{gdzie}$$

$$1\le k_1\le n_1,\quad 1\le k_2\le n_2,\ \ldots,\ 1\le k_n\le n_n.$$

π oznaczać będziemy symbolem $\pi_1\times\pi_2\times\ldots\times\pi_n$. Zbiór wszystkich podziałów π odcinka D oznaczać będziemy $\Pi(D)$

Jeśli $\pi=\pi_1\times\ldots\times\pi_n$, $\pi'=\pi_1'\times\ldots\times\pi_n'$ to mówimy, że π jest drobniejszy niż π' jeśli dla $i\in\{1,\ldots,n\}$ π_i jest drobniejszy niż π_i'.

Miarą przedziału $D=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ nazywamy liczbę $m(D)\equiv\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

Zauważmy, że jeśli $\Pi=\{D_k\ 1\le k\le l\}$ jest podziałem przedziału D, to $m(D)=\sum_{k=1}^{l} m(D_k)$

Dla ograniczonej funkcji $f: D\to\mathbb{R}$ i podziału $\pi=\{D_k: 1\le k\le l\}$ definiujemy sumę górną i sumę dolną

$$\overline{S}(\pi,f)=\sum_k m(D_k)\cdot\sup_{D_k} f$$

$$\underline{S}(\pi,f)=\sum_k m(D_k)\inf_{D_k} f$$

Zauważmy, że $\underline{S}(f,\pi)\le\overline{S}(f,\pi)$

Lemat: Przypuśćmy, że π' jest drobniejszy od π. Wówczas $\underline{S}(f,\pi)\le\underline{S}(f,\pi')$ & $\overline{S}(f,\pi')\le\overline{S}(f,\pi')$

Dowód dla $\underline{S}$: Każdy odcinek $S\in\pi$ składa się z kilku odcinków $S_1',\ldots,S_a'\in\pi$ oraz $m(S)=m(S_1')+\ldots+m(S_a')$. Skoro $\inf_S f\le\inf f(S_\alpha')$ $1\le\alpha\le a$ to

$$m(S_1')\inf_{S_1'} f+m(S_2')\inf_{S_2'} f+\ldots+m(S_a')\inf_{S_a'} f\geqslant$$

$$\left(m(S_1')+\ldots+m(S_a')\right)\inf_S f=m(S)\inf_S f$$

Zatem $\underline{S}(f,\pi')\geqslant\underline{S}(f,\pi)$

Wniosek: Dla każdej pary π_1,π_2 podziałów D spełniona jest nierówność $\underline{S}(f,\pi_1)\le\overline{S}(f,\pi_2)$

Niech π_3 będzie podziałem drobniejszym od π_1 i π_2. Wtedy $\underline{S}(f,\pi_1)\le\underline{S}(f,\pi_3)\le\overline{S}(f,\pi_3)\le\overline{S}(f,\pi_2)$ ∎

Definicja

Mówimy, że $f: D \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na D jeśli f jest ograniczona oraz $\sup_{\pi\in\Pi(D)} \underline{S}(f,\pi) = \inf_{\pi\in\Pi(D)} \overline{S}(f,\pi)$. Wspólną wartość tych wyrażeń oznaczać będziem $\int_D f$ i nazywać całką z funkcji f po zbiorze D.

Dość często $\int_D f$ oznaczamy $\int_D f(x_1, .., x_n)\,dx_1 .. dx_n$

Twierdzenie 1 Funkcja $\underbrace{}_{\text{ograniczona}}$ $f: D \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na D jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział π odcinka D taki, że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$

Dowód: Taki sa jak dla całki w wymiarze n=1.

Korzystając z Tw1 łatwo wykazać

Twierdzenie 2

1. Funkcja stała $D \ni x \mapsto f(x) = c$ jest całkowalna oraz $\int_D f = c\, m(D)$
2. Jeśli $f, g: D \to \mathbb{R}$ są całkowalne
   a. oraz $f \le g$ to $\int_D f \le \int_D g$
   b. oraz $c \in \mathbb{R}$ to cf - całk. i $\int_D cf = c \cdot \int_D f$
   c. to $f+g$ jest całkowalna oraz $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$

Udowodnimy (2)

Niech Π_f będzie podziałem D t. że

$$\int_D f \leq \underline{S}(f,\Pi_f)+\varepsilon.$$

Podobnie wybieramy Π_g.

Niech Π będzie drobniejszy niż Π_f i Π_g.

Zauważmy, że dla $x \in D_k$, gdzie $D_k \in \Pi$ mamy $f(x)+g(x) \leq \sup_{D_k} f + \sup_{D_k} g$ a więc

$$\sup_{D_k}(f+g) \leq \sup_{D_k}(f) + \sup_{D_k}(g)$$

Podobnie $\inf_{D_k}(f+g) \geq \inf_{D_k} f + \inf_{D_k} g$

Zatem

$$\overline{S}(f+g,\Pi) = \sum m(D_k)\sup_{D_k}(f+g) \leq \sum_k m(D_k)\sup_{D_k} f + \sum_k m(D_k)\sup_{D_k} g = \overline{S}(f,\Pi)+\overline{S}(g,\Pi) \leq \overline{S}(f,\Pi_f)+\overline{S}(g,\Pi_g)$$

$$\leq \underline{S}(f,\Pi_f)+\underline{S}(g,\Pi_g)+2\varepsilon \leq \underline{S}(f,\Pi)+\underline{S}(g,\Pi)+2\varepsilon \leq \underline{S}(f+g,\Pi)+2\varepsilon$$

czyli $f+g$ - całkowalna.

Ponadto $\overline{S}(f+g,\Pi) \leq \overline{S}(f,\Pi_f)+\overline{S}(f,\Pi_g) \leq \int_D f + \int_D g$ $+2\varepsilon$

a więc $\int_D f+g \leq \int_D f + \int_D g$ $+2\varepsilon$ Podobnie

Możemy przejść z epsilonem do zera!!!

$$\underbrace{\int_D -f-g}_{-\int_D (f+g)} \leq \int_D -f + \int_D -g = -\left(\int_D f + \int_D g\right) \Rightarrow \int_D f + \int_D g \leq \int_D f+g$$

$\square$

Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest miary zero (lub ma miarę zero) jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją odcinki $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ t. że

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(D_k) \leq \varepsilon$$

Przykład Zbiór liczb wymiernych między 0 a 1 jest miary zero.

Dowód: Liczby wymierne można ustawić w ciąg (ponumerować!), $x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Niech D_k będzie odcinkiem dł. $\frac{\varepsilon}{2^k}$ który zawiera x_k. Wtedy

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \quad \text{oraz}$$

$$\sum m(D_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Ogólniej, zachodzi następujące twierdzenie.

<u>Twierdzenie 3</u> Jeśli $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ oraz każdy A_i jest miary zero to A jest miary zero.

Dowód Niech $\varepsilon > 0$. Skoro A_j jest miary zero to istnieje pokrycie A_j odcinkami $\{D_{j,i} : i \in \mathbb{N}\}$ t. że $\sum_i m(D_{j,i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Zatem $\{D_{j,i} : j, i \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem odcinków t. że $A \subset \bigcup D_{j,i}$ oraz

$$\sum_{i,j} m(D_{j,i}) = \sum_j \sum_i m(D_{j,i}) \leq \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \quad \square$$

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma zerową objętość jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończone pokrycia A odcinkami $\{D_1, .., D_n\}$ t. że

$m(D_1)+\ldots+m(D_k) < \varepsilon$.

Zbiór zerowej objętości ma zerową miarę.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Zauważmy, że zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ miary zero ma zerową objętość.

Rozwiązanie: Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\{D_1, D_2, D_3, \ldots\}$ będzie pokryciem K: $\sum m(D_k) < \varepsilon$

<u>Tw</u> K - zwarty $\Leftrightarrow$ z każdego pokrycia jw. można wybrać podpokrycie skończone.

Czyli istnieje N: $K \subset D_1 \cup \ldots \cup D_N$.

i jasne jest że $m(D_1)+\ldots+m(D_N) < \varepsilon$.

Udowodnimy proste wynikanie (ogólniejszego) twierdzenia.

Stwierdzenie jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ spełnia warunek: "Dla dowolnego pokrycia K zbiorami otwartymi $\{O_i\}_{i \in I}$ istnieje podpokrycie skończone zbioru K"

to K jest zwarty.

Dowód

Przypuśćmy, że $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ jest ciągiem elementów zbioru K z którego nie można wybrać podciągu zbieżnego

① $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ musi zawierać nieskończenie wiele różnych elementów.

② jeśli $x \in K$ spełnia: dla każdego ε, $K(x,\varepsilon)$ zawiera element $\{k_n : n\in\mathbb{N}\}$ nierówny x to $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawiera podciąg zbieżny do x.

Zatem, dla $x \in K$ istnieje $\varepsilon_x > 0$ t. że $B(x,\varepsilon_x) \cap \{k_n : n\in\mathbb{N}\}$ jest co najwyżej 1-elementowy

③ Zauważmy, że $\{B(x,\varepsilon_x) : x \in K\}$ jest pokryciem K z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego - sprzeczność.