Wykład 19 Całka Riemanna w n wymiarach ①

Czy funkcja ciągła $f: D \to \mathbb{R}$ jest całkowalna?

$D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ - odcinek w $\mathbb{R}^n$

Okazuje się, że tak: ustalmy $\varepsilon > 0$. Wystarczy wskazać podział Π odcinka D t. że $\overline{S}(\Pi, f) - \underline{S}(\Pi, f) < \varepsilon$.

Funkcja f na zbiorze zwartym D jest jednostajnie ciągła. Czyli istnieje δ t. że jeśli $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ to $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{m(D)}$ gdzie $m(D)$ jest objętością D.

Jeśli Π jest podziałem D na odcinki $\{D_1, \ldots, D_l\}$ t. że dla $x, \tilde{x} \in D_k$ mamy $\|x - \hat{x}\| < \delta$ to

$\sup\limits_{D_k} f - \inf\limits_{D_k} f < \frac{\varepsilon}{m(D)}$. Zatem

$$\overline{S}(\Pi, f) - \underline{S}(\Pi, f) = \sum_{k=1}^{l} m(D_k)\left(\sup_{D_k} f - \inf_{D_k} f\right) \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{m(D_k)}{m(D)} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$ i widzimy, że f jest całkowalna na D. ▪

Ciągłość $f: D \to \mathbb{R}$ jest zbyt silnym warunkiem. Jeśli $\overline{K(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ jest kulą domkniętą oraz $f: \overline{K(0,1)} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą to chcielibyśmy obliczać całkę $\int_{\overline{K(0,1)}} f(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$, którą <u>definiujemy następująco</u>. Niech D będzie odcinkiem oraz $\overline{K(0,1)} \subset D$. Rozważmy funkcję $\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$ gdzie

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \overline{K(0,1)} \\ 0 & x \notin \overline{K(0,1)} \end{cases}.$$

Zauważmy, że $\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$ ~~nie~~ jest ciągła ②
we wszystkich punktach poza sfery $S(0,1)$
$S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.
Czy $\tilde{f}$ jest całkowalna? Tak bo sfera
jest miary zero. Mówi o tym twierdzenie

Twierdzenie (Lebesgue'a)
Funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na D
wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór punktów
nieciągłości f jest miary zero.

Zanim przejdziemy do dowodu rozważmy
Definicję: Wahaniem funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w punkcie
$x_0 \in A$ nazywamy liczbę

$$\omega(f; x_0) = \lim_{r \to 0} \left(\sup_{x \in A \cap K(x_0, r)} f - \inf_{x \in A \cap K(x_0, r)} f \right)$$

Punkt x_0 jest punktem ciągłości $f \Leftrightarrow \omega(f, x_0) = 0$

Do dowodu Tw. Leb. potrzebny jest następujący
fakt: Stwierdzenie. Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona.
Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem domkniętym
to dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór
$A_\varepsilon = \{x \in A : \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ jest domknięty.

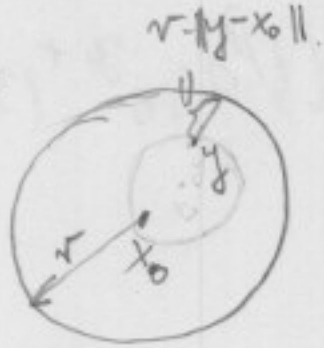
<u>Dowód</u>: Udowodnimy, że $\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$ jest otwarty
Zauważmy, że $\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon = \{x \in A : \omega(f, x) < \varepsilon\}$

Zauważmy, że jeśli $r'<r$ to

$$\sup_{x\in A\cap K(x_0,r')} f - \inf_{x\in A\cap K(x_0,r')} f \leq \sup_{x\in A\cap K(x_0,r)} f - \inf_{x\in A\cap K(x_0,r)} f$$

bo sup maleje gdy r się zmniejsza a inf rośnie.

Niech więc $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$: $\omega(f,x_0)<\varepsilon$.



To oznacza, że istnieje $r>0$ t. że

$$\sup_{A\cap K(x_0,r)} f - \inf_{A\cap K(x_0,r)} f < \varepsilon.$$

Niech $y \in A\cap K(x_0,r)$ i $r_y = r-\|y-x_0\|$

Jest jasne, że $K(y,r_y)\subset K(x_0,r)$ a więc dla $\delta<r_y$ mamy

$$\sup_{A\cap K(y,\delta)} f - \inf_{A\cap K(y,\delta)} f \leq \sup_{A\cap K(x_0,r)} f - \inf_{A\cap K(x_0,r)} f < \varepsilon$$

i widzimy, że $\omega(f,y)<\varepsilon$. Wniosek

$x_0 \in \mathbb{R}^n\setminus A_\varepsilon \Rightarrow \exists_r : K(x_0,r)\subset \mathbb{R}^n\setminus A_\varepsilon$

czyli $\mathbb{R}^n\setminus A_\varepsilon$ jest otwarty a więc A_ε - domk.

A teraz czas na pomocniczy lemat

Lemat Niech D będzie odcinkiem domknię-tym w $\mathbb{R}^n$ oraz $f: D\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczo-ną t. że $\omega(f,x)<\varepsilon$ dla wszystkich $x\in D$. Wówczas istnieje podział π odcinka D t. że

$$\overline{S}(\pi,f)-\underline{S}(\pi,f)<\varepsilon\cdot m(D)$$

Dowód

Dla każdego $x \in D$ istnieje odcinek D_x t. że $\sup_{D_x} f - \inf_{D_x} f < \varepsilon$. (*)

Skoro D jest zwarty to D jest pokryte skończoną liczbą odcinków $D_{x_1}, \dots, D_{x_n}$

Niech $\pi = (D_1, \dots, D_l)$ będzie podziałem D t. że każdy D_i jest zawarty w jednym z odcinków D_{x_i}. Wówczas

$$\overline{S}(\pi, f) - \underline{S}(\pi, f) = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{\left(\sup_{D_i} f - \inf_{D_i} f\right)}_{(*) \Rightarrow \text{ mniejsze niż } \varepsilon} m(D_i)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{l} m(D_i) = \varepsilon m(D) \blacksquare$$

Przechodzimy do dowodu twierdzenia Lebesgue'a.

Niech B będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji $f: D \to \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że B jest miary zero. Zauważmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $B_\varepsilon = \{x \in D : \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ jest podzbiorem zbioru B. Poza tym B_ε jest domkniętym podzbiorem D. Zatem B_ε jest zwarty i jest miary zero. W szczególności istnieją odcinki domknięte $D_1, \dots, D_n$

t. że $\sum_{i=1}^{n} m(D_i) < \varepsilon$ oraz $B_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{(m)} D_i$

Niech $\pi = (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_k)$ (będzie) podziałem D, którego elementy dzielą się na dwie kategorie

- π_1 zawiera te $\tilde{D}_i$ dla których istnieje $D_{i'}$, że $\tilde{D}_i \subset D_{i'}$
- π_2 zawiera te $\tilde{D}_i$ dla których $\tilde{D}_i \cap B_\varepsilon = \emptyset$

Niech $M > 0$ będzie takie, że $|f(x)| < M$ dla $x \in D$. Wówczas

$$\sum_{\tilde{D}_i \in \pi_1} \Big(\underbrace{\sup_{\tilde{D}_i} f}_{\wedge \atop M} - \underbrace{\inf_{\tilde{D}_i} f}_{\wedge \atop M} \Big) m(\tilde{D}_i) \leq 2M \sum_{i'=1}^{n} m(D_{i'}) < 2M \varepsilon$$

Zauważmy, że jeśli $x \in \pi_2$ to $\omega(f, x) < \varepsilon$.

Ewentualnie biorąc podział drobniejszy i korzystając z lematu możemy przyjąć, że $\sum_{\tilde{D}_i \in \pi_2} \left(\sup_{\tilde{D}_i} f - \inf_{\tilde{D}_i} f \right) m(\tilde{D}_i) \leq \varepsilon \cdot m(D)$

Zatem $\sum_{\tilde{D}_i \in \pi_1 \cup \pi_2} \left(\sup_{\tilde{D}_i} f - \inf_{\tilde{D}_i} f \right) m(\tilde{D}_i) \leq$

$$2M\varepsilon + \varepsilon m(D) = (2M + m(D))\varepsilon$$

W szczególności f jest całkowalna

Wykażemy teraz, że jeśli $f: D \to R$ całkowalna to zbiór B jej punktów nieciągłości jest miary zero. (6)

Przypominamy, że $B_\varepsilon = \{x \in D : \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$

i zauważmy, że $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}$.

Wystarczy więc pokazać, że $B_{\frac{1}{n}}$ jest miary zero dla wszystkich $n \in N$. (wtedy B też)

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\Pi = (D_1, \dots, D_e)$ będzie podziałem D t. że

$\overline{S}(\Pi, f) - \underline{S}(\Pi, f) < \frac{\varepsilon}{n}$.

Niech Π_1 zawiera te elementy Π, które przecinają się z $B_{\frac{1}{n}}$. Wtedy Π_1 jest pokryciem $B_{\frac{1}{n}}$ odcinkami oraz

$$\sup_{D_i} f - \inf_{D_i} f \geq \frac{1}{n} \quad \text{dla } D_i \in \Pi_1$$

(gdyż $D_i \cap B_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$).

W szczególności

$$\frac{1}{n}\sum_{D_i\in\Pi_1} m(D_i) \leq \sum_{D_i\in\Pi_1}\left(\sup_{D_i} f - \inf_{D_i} f\right) m(D_i)$$

$$\underset{\Pi_1\subset\Pi}{\leq} \sum_{D_i\in\Pi}\left(\sup_{D_i} f - \inf_{D_i} f\right) m(D_i) =$$

$$\overline{S}(\Pi,f) - \underline{S}(\Pi,f) \leq \frac{\varepsilon}{n} \text{ czyli}$$

$$\sum_{D_i\in\Pi_1} m(D_i) \leq \varepsilon$$ i wnioskujemy, że

$B_{\frac{1}{n}}$ jest miary Lebesgue'a zero.

Konkluzja: B jest miary Leb. zero ☒

Wracając do całek po dowolnych zbiorach $C\subset D$ gdzie D jest domkniętym odcinkiem a C jest niepustym podzbiorem C. ~~Ozna~~ Niech χ_C oznacza funkcję charakterystyczną zbioru C

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & x\in C \\ 0 & x\in D\setminus C \end{cases}$$

Przykład $C = \overline{K(0,1)}$.

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{K(0,1)} \\ 0 & x \notin \overline{K(0,1)} \end{cases}$$

Funkcja jest ciągła poza $S(0,1)$.
Zbiór punktów nieciągłości $\chi_{\overline{K(0,1)}}$ to sfera $S(0,1)$. Zobaczymy na kolejnym wykładzie, że $S(0,1)$ jest zbiorem miary zero. czyli $\chi_{\overline{K(0,1)}}$ jest funkcją całkowalną i $\int \chi_{\overline{K(0,1)}}$ jest objętością jednostkowej kuli n-wymiarowej.

Ogólniej jeśli $C \subset D$ to brzegiem C nazywamy zbiór $\partial C = \overline{C} \setminus \operatorname{Int} C$ gdzie
$\overline{C}$ jest domknięciem zbioru C
$\operatorname{Int} C$ jest wnętrzem C:
$x \in \operatorname{Int} C \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \; K(x,\varepsilon) \subset C$.
χ_C jest ciągła poza ∂C.