WYKŁAD 20.

PRZYPOMNIENIE 1

Funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ jest całkowalna $\Leftrightarrow$ zbiór $\{x \in D : f$ nie jest ciągła w $x\}$ jest miary zero.

Wniosek

① $f: D \to \mathbb{R}$ & $g: D \to \mathbb{R}$ - całkowalne na D

to $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ - całkowalna.

Rzeczywiście

$\{x \in D : f g$ nie jest ciągła w $x\} \subset$

$\{x \in D : f$ nie jest ciągła w $x\} \cup \{x \in D : g$ nie jest ciągła$\}$

② Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ oraz $f_1, \dots, f_k : D \to \mathbb{R}$ całkowalne & $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ - ciągła to $g: D \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$g(x_1, \dots, x_n) = F(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$ jest całkowalna

$\{$punkty nieciągłości $g\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{$punkty nieciągłości $f_i\}$

PRZYPOMNIENIE 2

Jeśli $C \subset \mathbb{R}^n$ to funkcja charakterystyczna

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

jest ciągła poza brzegiem

$\partial C = \overline{C} \setminus \mathrm{Int}\, C$.

Definicja Jeśli brzeg $\partial C = \bar{C} \setminus \mathrm{Int}\, C$ jest (2)
miary zero to mówimy, że zbiór C jest
jordanowsko mierzalny. (j-mierzalny)
Jeśli $C \subset D$ jest jordanowsko mierzalny
oraz $f: D \to \mathbb{R}$ jest całkowalna to
$f \cdot \chi_C : D \to \mathbb{R}$ jest mierzalna oraz

$\int_D f \cdot \chi_C$ nazywamy całką z f po zbiorze C

i oznaczamy $\int_C f$.

Własności

(1) $\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$

(2) $C = C_1 \cup C_2$ oraz $C_1 \cap C_2 = \phi$ to

$\int_C f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$ gdyż $\chi_C = \chi_{C_1} + \chi_{C_2}$.

Jakie zbiory są j-mierzalne? Czy kula $K(x,r)$
jest j-mierzalna? $\partial K(x,r) = S(x,r) = \{y : \|x-y\| = r\}$
Sfera jest powierzchnią $n-1$ wymiarową w $\mathbb{R}^n$.
W szczególności $S(x,r)$ jest lokalnie wykresem odwzorowania gładkiego.

Twierdzenie: Jeśli brzeg $C \subset \mathbb{R}^n$ jest lokalnie wykresem odwzorowania ciągłego
to C jest j-mierzalny.

③

Dowód: Wystarczy pokazać, że jeśli $D \subset \mathbb{R}^{n-k}$ oraz $f: D \to \mathbb{R}^k$ to wykres $\{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^n$ jest miary zero. W tym celu zauważmy, że ① D jest zwarty ② f jest jednostajnie ciągła na D

Czyli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ t. że dla każdego $x = (x_1, \dots, x_{n-k})$ mamy

$$f(\overbrace{[x_1-\delta, x_1+\delta] \times \dots \times [x_{n-k}-\delta, x_{n-k}+\delta]}^{\text{ozn } [x-\delta, x+\delta]}) \subset \underbrace{[f_1(x)-\varepsilon, f_1(x)+\varepsilon] \times \dots \times [f_k(x)-\varepsilon, f_k(x)+\varepsilon]}_{[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]}.$$

gdzie $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$.

Zatem wykres f nad kostką $[x-\delta, x+\delta]$ jest zawarty w przedziale $[x-\delta, x+\delta] \times [f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$ którego miara wynosi $(2\delta)^{n-k}(2\varepsilon)^k$. Zatem wykres f zawiera się w zbiorze o objętości (sumie) mniejszej niż $m(D)(2\varepsilon)^k$ ∎

TWIERDZENIE FUBINIEGO.

PRZYPOMNIENIE: $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ - ciągła to $\int_a^b dx \left(\int_c^d dy\, f(x,y)\right) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$. Ponadto f jest całkowalna na $[a,b] \times [c,d]$. Czy $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)$?

Niech $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$ gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Wówczas $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$

Zauważmy, że dla dostatecznie drobnego podziału $[a,b]$ suma

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int_{[c,d]} f(x_i,y)\,dy \approx$$

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y).$$

Z tej idei da się zrobić dowód jeśli f jest ciągła. Jeśli jednak f nie jest ciągła ale jest całkowalna to dla pewnych $x\in[a,b]$ funkcja $y\longmapsto f(x,y)$ może nie być całkowalna po $[c,d]$ ze względu na y.
Można sobie z tym problemem poradzić jeśli przy użyciu całek górnych/dolnych

$$\overline{\int_D} f = \inf_{\pi\in\Pi(D)} \overline{S}(\pi,f), \quad \underline{\int_D} f = \sup_{\pi\in\Pi(D)} \underline{S}(\pi,f).$$

Twierdzenie (Fubiniego)
Niech D_1, D_2 będą przedziałami w $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ odpowiednio i niech $D = D_1\times D_2 \subset \mathbb{R}^n$ $n=n_1+n_2$.
Dla funkcji całkowalnej $f: D\to\mathbb{R}$ zdefiniujmy funkcje $\varphi: D_1\to\mathbb{R}$ i $\psi: D_1\to\mathbb{R}$ wzorami

$$\varphi(x) = \underline{\int_{D_2}} f(x,y)\,dy, \quad \psi(x) = \overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,dy$$

Wówczas φ oraz ψ są całkowalne na D_1 oraz

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} \varphi(x)\,dx = \int_{D_1} \psi(x)\,dx.$$

<u>Dowód</u> Niech Π_1 będzie podziałem D_1 i Π_2 będzie podziałem D_2. i niech $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$ będzie podziałem $D_1 \times D_2$: jeśli $P_k \in \Pi_1$, $Q_\ell \in \Pi_2$ to $P_k \times Q_\ell \in \Pi$ oraz $m(P_k \times Q_\ell) = m(P_k)\,m(Q_\ell)$.

Oznaczmy $D_{k\ell} = P_k \times Q_\ell$ i niech

$$m_{k\ell} = \inf_{D_{k\ell}} f(x,y) \qquad M_{k\ell} = \sup_{D_{k\ell}} f$$

$$m_\ell(x) = \inf_{y \in Q_\ell} f(x,y) \qquad M_\ell(x) = \sup_{y \in Q_\ell} f(x,y).$$

Przy tych oznaczeniach

$$\underline{S}(\Pi,f) = \sum_{k,\ell} m_{k\ell}\, m(P_k)\, m(Q_\ell) = \sum_k \Big(\sum_\ell m_{k\ell}\, m(Q_\ell)\Big) m(P_k)$$

Niech $x_k \in P_k$. Wówczas $m_{k\ell} \le m_\ell(x_k)$ oraz $M_{k\ell} \geq M_\ell(x_k)$. i stąd

$$\underline{S}(\Pi,f) \le \sum_k \Big(\sum_\ell m_\ell(x_k)\, m(Q_\ell)\Big) m(P_k) =$$

$$= \sum_k \underline{S}(\Pi_2, f(x_k,\cdot))\, m(P_k) \le \sum_k \Big(\underline{\int_{D_2}} f(x_k,y)\,dy\Big) m(P_k)$$

$$= \sum_k \varphi(x_k)\, m(P_k) \le \sum_k \psi(x_k)\, m(P_k) \le \sum \overline{S}(\Pi_2, f(x_k,\cdot))$$

$$\leq \sum_k \bar{S}(\Pi_2, f(x_k, \cdot))\, m(P_k) =$$

$$\sum_k \sum_l M_l(x_k)\, m(Q_l)\, m(P_k) \leq$$

$$\sum_{k,l} M_{kl}\, m(Q_l)\, m(P_k) = \bar{S}(\Pi, f).$$

Zatem dla każdego wyboru punktów x_k mamy $\underline{S}(\Pi, f) \leq \sum \varphi(x_k)\, m(P_k) \leq \bar{S}(\Pi, f)$ zatem biorąc inf i sup po wyborach x_k mamy
$\underline{S}(\Pi, f) \leq \underline{S}(\Pi_1, \varphi) \leq \bar{S}(\Pi_1, \varphi) \leq \bar{S}(\Pi, f)$.

Z całkowalności f wynika, że φ jest całkowalna oraz
$\int_D f = \int_{D_1} \varphi$. Podobnie pokazujemy, że ψ jest całkowalna oraz $\int_D f = \int_{D_1} \psi$. $\boxtimes$

Przykład
Jeśli $C \subset D_1 \times D_2$ jest J-mierzalny to twierdzenie Fubiniego można użyć do obliczenia $\int_C f = \int_{D_1 \times D_2} c \cdot f$.

Rozważmy przykładowo

$C = [-1,1]\times[-1,1] \setminus \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Wówczas $\int_C f = \int_{-1}^{1} dx \left(\int_{-1}^{1} dy\, f(x,y)\cdot \chi_C(x,y) \right)$

Zauważmy, że $\chi_C(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > \sqrt{1-x^2} \\ 0 & |y| < \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

W takim razie

$$\int_{-1}^{1} dy\, f(x,y)\,\chi_C(x,y) = \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} dy\, f(x,y) + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} dy\, f(x,y).$$