Twierdzenie o zamianie zmiennych, przykład ①

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ Obliczyć całkę $\int\limits_{K(0,1)=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}} f(x,y)\,dx\,dy =: I$

Z twierdzenia Fubiniego

$$I = \int_{-1}^{1} dx\, e^{-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\, e^{-y^2} \text{ - trudne}$$

Nowe zmienne $x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{bmatrix}$

$K(0,1)$ w zmiennych ρ, φ $\left\{(\rho,\varphi) : \begin{matrix} 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq\rho\leq 1 \end{matrix}\right\}$

Funkcja f w zmiennych ρ, φ

$\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

?? $dx\,dy$ w zmiennych ρ,φ ??

Heurystyka/rysunki $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

Algebra/heurystyka $\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{bmatrix}}^{A(\rho,\varphi)} \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta\varphi \end{bmatrix}$

pochodna (*)

Objętość prostokąta $\boxed{}$ δx, δy : $\delta x \delta y = \det[\delta_x e_x, \delta_y e_y]$

$= \det A(\rho,\varphi)[\delta_\rho e_\rho, \delta_\varphi e_\varphi] = \det A(\rho,\varphi) \cdot \delta\rho\delta\varphi$ forma objętości

Zauważmy, że $\det A(\rho,\varphi) = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$

Zatem $\delta x \delta y = \rho\,\delta\rho\,\delta\varphi$.

W takim razie

$$I = \int\limits_{K(0,1)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\left\{\begin{smallmatrix} 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq\rho\leq 1 \end{smallmatrix}\right\}} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi = 2\pi\int_0^1 e^{-\rho^2}\rho\, d\rho = -\frac{2\pi}{2} e^{-\rho^2}\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{\pi(e-1)}{e}$$

Naszym celem jest udowodnienie twierdzenia o zamianie zmiennych

$\Psi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ - zamiana zmiennej a dokładniej odwzorowuje $\mathcal{O}$ bijektywnie na $\mathcal{O}'$ gdzie $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$

Załóżmy, że Ψ jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Niech $K' \subset \mathcal{O}'$ będzie zbiorem zwartym j-mierzalnym, podobnie K - zwarty j-mierzalny oraz $\Psi(K) = K'$.

Jeśli $f : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ ciągła to

mnożenie funkcji

$$\int_{K'} f = \int_K \underbrace{f \circ \Psi}_{\text{złożenie funkcji}} \cdot \underbrace{|\det \Psi'|}_{\text{jacobian}}.$$

w szczególności $f \circ \Psi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$

Zauważmy, że $\det \Psi'$ jest "w module".

Algebra: objętość układu wektorów $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ obliczamy wzorem

$$|\det(v_1, \dots, v_n)|.$$

Przypomnienie SEM I.

$f : I' \to \mathbb{R}$ $g : I \to I'$ bijekcja różniczkowalna na I. Wówczas

$$\int_I (f \circ g)(x) \, |g'(x)| \, dx = \int_{I'} f(y) \, dy.$$

Zatem dla $n=1$ twierdzenie jest prawdziwe. ③

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$. Krok indukcyjny będzie skomplikowany. Załóżmy, że ψ jest postaci

$$\psi(x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix}\psi_1(x_1,\dots,x_n)\\ \psi_i(x_1,\dots,x_n)\\ \psi_n(x_1,\dots,x_n)\end{bmatrix} \text{ gdzie } \psi_i(x_1,\dots,x_n)=x_j$$

Zmieniając kolejności wsp x_k oraz funkcję ψ_e nie zmieniamy $|\det\psi'(x)|$. Zatem bez straty ogólności możemy założyć, że $i=j=1$.

Załóżmy dodatkowo, że zbiór

$\{y_1 : \begin{bmatrix}y_1\\ y_n\end{bmatrix}\in\mathcal{O}'\}$ jest odcinkiem I'

Oznaczmy $\mathcal{O}'(y_1)=\left\{\begin{bmatrix}y_2\\ y_n\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}y_1\\ y_n\end{bmatrix}\in\mathcal{O}'\right\}$ & $\mathcal{O}(x_1)=\left\{\begin{bmatrix}x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in\mathcal{O}\right\}$

Z twierdzenie Fubiniego mamy

$$\int_{\mathcal{O}} F\circ\psi\cdot|\det\psi'| = \int_I dx_1\Big(\int_{\mathcal{O}(x_1)} dx_2\dots dx_n\, F\circ\psi(x_1\dots x_n)\cdot|\det\psi'(x_1,\dots,x_n)|$$

dla dowolnej $F:\mathcal{O}'\longrightarrow\mathbb{R}$ całkowalnej.

Dalej $F=\begin{cases} f & \text{na } K'\\ 0 & \text{poza } K'\end{cases}$

Ustalmy y_1 i niech dla $x_1=y_1$ $\mathcal{O}(x_1)\subset\mathbb{R}^{n-1}$

będzie zbiorem postaci – jak wyżej.

$\mathcal{O}(x_1)=\left\{\begin{bmatrix}x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in\mathcal{O}\right\}$ Skoro $\psi_1(x_1,\dots,x_n)=x_1$

to odwzorowanie $\psi_{x_1}(x_2,\dots,x_n):=\psi(x_1\dots x_n)$ jest bijekcją $\mathcal{O}(x_1)$ i $\mathcal{O}'(y_1)$. Ponadto

pomiń Psi_1!!! w powyższej formułce

$$\det \Psi'_{x_1}(x_2,\dots,x_n) = \det \Psi'(x_1,\dots,x_n) \quad (**)$$

Rzeczywiście: założyliśmy, że

$$\Psi(x_1 \dots x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \Psi_2(x_1 \dots x_n) \\ \Psi_n(x_1 \dots x_n) \end{bmatrix}$$ i widzimy, że

$$\Psi'(x_1 \dots x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ * & \\ * & \boxed{\Psi'_{x_1}} \\ \vdots & \\ * & \end{bmatrix}.$$ Zatem $(**)$

wynika z rozwinięcia Laplace'a.

Korzystając z tw. o zamianie zmiennych w wymiarze $n-1$ dostajemy

$$\int_{O(x_1)} dx_2 \dots dx_n \, F \circ \Psi(x_1,\dots,x_n) \, |\det \Psi'(x_1,\dots x_n)|$$

$$= \int_{O(x_1)} dx_2 \dots dx_n \, F(x_1 = y_1, \Psi_2(x_1,\dots,x_n),\dots,\Psi_n(x_1 \dots x_n)) \, |\det \Psi'_{x_1}(x_2,\dots,x_n)|$$

$$= \int_{O'(y_1)} dy_2 \dots dy_n \, F(y_1,\dots,y_n)$$

Ostatecznie

$$\int_O F \circ \Psi \, |\det \Psi'| = \int_I \overset{dy_1}{\overbrace{dx_1}} \int_{O(x_1)} dx_2 \dots dx_n \, F \circ \Psi(x_1 \dots x_n) \, |\det \Psi'| =$$

$$= \int_I dy_1 \int_{O'(y_1)} dy_2 \dots dy_n \, F(y_1,\dots,y_n) = \int_{O'} F.$$

Co nam daje taki szczególny przypadek Ψ?

Zauważmy, że lokalnie każde Ψ jest złożeniem $\tilde{\Psi}_1 \circ \tilde{\tilde{\Psi}}_2$ gdzie $\tilde{\Psi}_1$ i $\tilde{\tilde{\Psi}}_2$ jest typu rozważanego na stronie 3 i 4. To znaczy dla $\tilde{\Psi}_1$ istnieje i_1 oraz j_1 t. że $\tilde{\Psi}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n) = x_{j_1}$ gdzie $\tilde{\Psi}_{1,i_1}$ jest i_1-tą współrzędną odwzorowania $\tilde{\Psi}_1$.

Podobnie istnieje i_2 i j_2 t. że $\tilde{\tilde{\Psi}}_{2,i_2}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = x_{j_2}$.

Fakt jeśli $\Psi = \tilde{\Psi}_1 \circ \tilde{\tilde{\Psi}}_2$ gdzie $\tilde{\Psi}_1, \tilde{\tilde{\Psi}}_2$ - j.w. to twierdzenie o zamianie zmiennych jest prawdziwe dla Ψ.

Rzeczywiście:

$$\int_{\Theta} F \circ \Psi |\det \Psi'| = \int_{\Theta} F \circ \tilde{\Psi}_1 \circ \tilde{\tilde{\Psi}}_2 \, |\det \tilde{\Psi}_1'| |\det \tilde{\tilde{\Psi}}_2'|$$

$$= \int_{\tilde{\Theta}} F \circ \tilde{\Psi}_1 \, |\det \tilde{\Psi}_1'| = \int_{\Theta'} F$$

Udowodnijmy więc, że Ψ jest lokalnie postaci $\tilde{\Psi}_1 \circ \tilde{\tilde{\Psi}}_2$. Zauważmy w tym celu, że skoro $|\det \Psi'(x)| \neq 0$ to na pewnym otoczeniu x istnieją k, l : $\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_l} \neq 0$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $k = l = 1$

Czyli $\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \neq 0$ na otoczeniu x'a!

Rozważmy odwzorowania

$$\tilde{\tilde{\Psi}}_2(x_1,\dots,x_n) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x_1,\dots,x_n) \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{\Psi}_1(\Psi_1(x_1,\dots,x_n), x_2,\dots,x_n) := \Psi(x_1,\dots,x_n)$$

Jest jasne, że $\Psi = \hat{\Psi}_1 \circ \hat{\hat{\Psi}}_2$ oraz $\hat{\tilde{\Psi}}_1$ & $\hat{\tilde{\Psi}}_2$ są odpowiedniego typu (typu j.w.)

Czyli prawie udowodniliśmy twierdzenie

Problem: $\Psi = \tilde{\Psi}_1 \circ \tilde{\tilde{\Psi}}_2$ jest rozkładem loka-lnym: wokół każdego punktu $x \in \mathcal{O}$ mamy taki rozkład ale zmienia się on od punktu do punktu.

Przejście od sytuacji lokalnej daje się wykonać korzystając z rozkładu jedności

Dłuższa wstawka na ten temat:

Zacznijmy od obserwacji, że funkcja $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $\lambda(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}} & |t|<1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$ jest gładka a jej nośnik

$$\overline{\{x : \lambda(x) \neq 0\}} = \overline{]-1,1[} = [-1,1].$$

Definicja Niech $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nośnikiem $\operatorname{supp} f$ nazywamy domknięcie zbioru $\{x : f(x) \neq 0\}$.

Zakończymy nasz dzisiejszy wykład następującym lematem

<u>Lemat</u> Niech $K \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem zwartym i niech $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{n}$ będzie skończonym pokryciem K. Istnieją funkcje $g_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ klasy C^∞ t. że $\operatorname{supp} g_i \subset \mathcal{U}_i$ oraz $\sum g_i(x) \geq 1$ dla $x \in K$.

Dowód: Dla $x \in K$ ustalmy wskaźnik $i(x) \in \{1, \dots, n\}$ t. że $x \in \mathcal{U}_{i(x)}$ $\{K \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n\}$. Dalej, niech $r(x)$ będzie liczbą dodatnią t. że $K(x, r(x)) \subset \mathcal{U}_{i(x)}$. Kule $K(x, \frac{r(x)}{2})$ tworzą pokrycie zwartego zbioru K, więc można znaleźć $x_1, \dots, x_N$ t. że
$$K \subset K\left(x_1, \frac{r(x_1)}{2}\right) \cup \dots \cup K\left(x_N, \frac{r(x_N)}{2}\right)$$
Zdefiniujmy funkcję $\lambda_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ wzorem $\lambda_j(x) = e^{\frac{4}{3}} \lambda\left(\frac{\|x - x_j\|}{r(x_j)}\right)$

① λ_j jest klasy C^∞ : $\lambda_j(x) = \begin{cases} e^{\frac{4}{3}} \exp \frac{r(x_j)^2}{\|x - x_j\|^2 - r(x_j)^2} & \|x - x_j\| \leq r(x_j) \\ 0 & \|x - x_j\|^2 > r(x_j)^2 \end{cases}$

② $\operatorname{supp} \lambda_j \subset K(x_j, r(x_j)) \subset \mathcal{U}_{i(x_j)}$

③ Dla $x \in K\left(x_j, \frac{r(x_j)}{2}\right)$: $\lambda(x) \geq e^{\frac{4}{3}} \exp\left(\frac{1}{\frac{r(x_j)^2}{4 r(x_j)^2} - 1}\right) = e^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{4}{3}} = 1$

Dla $i \in \{1, \dots, n\}$ definiujemy $g_i(x) = \sum_{i(x_k) = i} \lambda_k(x)$, które spełniają tezę tw. ☐