Twierdzenie o zamianie zmiennych

$$\int_{\Psi(K)=K'} f = \int_K f\circ\Psi \cdot |\det \Psi'|$$ jest prawdziwe lokalnie

to znaczy na "małych" zbiorach K (dla których Ψ jest odpowiedniego typu). Przejście do globalnej wersji wymaga użycia rozkładu jedności dla pokrycia zbioru K zbiorami otwartymi $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$.

Twierdzenie 1

Niech K będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi t. że $K \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_k$. Istnieją funkcje $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ t. że $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \mathcal{U}_i$ $\quad 0 \le \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) \le 1$ & $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = 1$ dla $x\in K$.

Zobaczmy najpierw jak twierdzenie 1 pozwala przejść od lokalnego do globalnego dowodu tw. o zamianie zmiennych.

Niech $\mathcal{O} = \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ będzie pokryciem $\mathcal{O}$ i niech $\mathcal{O}_\alpha' = \Psi(\mathcal{O}_\alpha)$.

Przypuśćmy, że dla $\mathcal{O}_\alpha \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_\alpha'$ zachodzi twierdzenie o zamianie zmiennych. Skoro $K \subset \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ oraz K - zwarty to z pokrycia $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ zbioru K można wybrać podpokrycie skończone $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{O}_{\alpha_n}$. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie rozkładem jedności dla pokrycia $\mathcal{O}_{\alpha_1}', \dots, \mathcal{O}_{\alpha_n}'$ zbioru K': $K' = \Psi(K) \subset \Psi(\mathcal{O}_{\alpha_1}) \cup \dots \cup \Psi(\mathcal{O}_{\alpha_n})$.

Wówczas
$$\int_{K'} f = \int_{K'} \underbrace{\sum_{i=1}^k \varphi_i(y)}_{\overset{\shortparallel}{1} \text{ dla } y\in K'} \cdot f(y)\, dy_1 \dots dy_n = \left\{ F(y) = \begin{cases} f(y) & \text{dla } y\in K' \\ 0 & \text{dla } y \notin K' \end{cases} \right\}$$

$$= \int_{\mathcal{O}'} \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(y) \cdot F(y)\, dy_1 \dots dy_n = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{O}'} \varphi_i(y) F(y)\, dy_1 \dots dy_n$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{supp}\varphi_i \subset \mathcal{O}'_{\alpha_i} \ \& \\ \operatorname{supp} F\cdot\varphi_i \subset \mathcal{O}'_{\alpha_i} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{O}'_{\alpha_i}} \varphi_i(y) F(y)\, dy_1 \dots dy_n$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{tw. jest praw-} \\ \text{-dziwe dla } \psi: \mathcal{O}_\alpha \to \mathcal{O}'_\alpha \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{O}_{\alpha_i}} \varphi_i \circ \psi \cdot F \circ \psi \cdot |\det \psi'| =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{supp}\varphi_i \circ \psi \subset \mathcal{O}_{\alpha_i} \\ \operatorname{supp} F \circ \psi \subset K \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{k} \int_K \varphi_i \circ \psi \cdot F \circ \psi \cdot |\det \psi'|$$

$$= \int_K \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ \psi(x)}_{\substack{\parallel \text{ dla } x \in K \\ 1}} \cdot F(\psi(x))\, |\det \psi'(x)|\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_K F(\psi(x))\, |\det \psi'(x)|\, dx_1 \dots dx_n .$$

Co kończy dowód twierdzenia o zamianie zmiennych.

Dowód twierdzenia 1 o istnieniu rozkładu jedności. Przypomnijmy Lemat: istnieją funkcje $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ t. że $\operatorname{supp} g_i \subset \mathcal{U}_i$ oraz $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) \geq 1$ dla $x \in K$. Oznaczmy $g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{U} = \{x : g(x) > 0\}$ jest otwarty & $K \subset \mathcal{U}$. Istnieje $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ t. że $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{U}$ oraz $\varphi(x) \geq 1$ dla $x \in K$. Rzeczywiście istnienie φ wynika z Lematu dla 1-elementowego pokrycia $K \subset \mathcal{U}$.

Rozważmy, $\tilde{\varphi} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ daną wzorem

$\tilde{\varphi}(x) = 1 - e \cdot \lambda(\varphi(x))$ gdzie $\lambda(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}} & |t|<1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$

Zauważmy, że jeśli $x \in K$ to

$\varphi(x) \geq 1$, $\lambda(\varphi(x)) = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = 1$

Jeśli $\varphi(x) = 0$ to $\tilde{\varphi}(x) = 1 - e\lambda(0) = 1 - e \cdot e^{-1} = 0$.

Poza tym $\tilde{\varphi}(x) \in [0,1]$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Zdefiniujmy.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{g_i(x)}{g(x)} \cdot \tilde{\varphi}(x) & \text{gdy } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

① Zauważmy, że φ_i są dobrze zdefiniowane, gdyż $\mathcal{U} = \{x : g(x) > 0\}$

② φ_i są gładkie bo $g_i, \frac{1}{g}, \tilde{\varphi}$ są gładkie na $\mathcal{U}$ oraz $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{U}$ czyli $\tilde{\varphi}|_{\partial\mathcal{U}} = 0$, a jedynymi punktami nieciągłości mogą być elementy $\partial\mathcal{U}$ (bo na $\mathcal{U}$ i $\mathbb{R}\setminus\mathcal{U}$ φ_i są ciągłe).

Zauważmy, że skoro na K $\tilde{\varphi} \equiv 1$ to dla $x \in K$ mamy

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} \sum_{i=1}^{k} g_i(x) = \frac{g(x)}{g(x)} = 1 \qquad \boxtimes$$

(X,d) - przestrzeń metryczna $\quad d: X\times X \to \mathbb{R}_+$ - metryka

$\mathcal{O}\subset X$ - otwarty jeśli $\forall x\in \mathcal{O}\ \exists r>0: K(x,r)\subset \mathcal{O}$

gdzie $K(x,r) = \{\tilde{x} : d(x,\tilde{x}) < r\}$

$(x_n)\subset X$ - ciąg elementów X jest zbieżny do elementu $x\in X$ jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$

Mówimy, że zbiór $K\subset X$ jest

(a) ciągowo zwarty jeśli z każdego ciągu $(x_n)\subset K$ można wybrać podciąg zbieżny do $x\in K$

(b) pokryciowo zwarty jeśli z każdego pokrycia $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ zbioru K otwartymi zbiorami $\mathcal{O}_i\subset X$ można wybrać podpokrycie skończone, tzn

$$K\subset \bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i \Rightarrow \exists\, i_1,\dots,i_n\in I: K\subset \mathcal{O}_{i_1}\cup\dots\cup\mathcal{O}_{i_n}.$$

Twierdzenie Zbiór $K\subset X$ jest ciągowo zwarty $\Leftrightarrow$ K jest pokryciowo zwarty.

Dowód ($\Leftarrow$) Było dla $X=\mathbb{R}^n$. Taki sam dowód pracuje dla dowolnej p-ni metrycznej X.

W skrócie: Jeśli z $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie można wybrać podciągu zbieżnego. to dla każdego $x \in K$ istnieje $K(x, r_x)$ zawierające co najwyżej 1 element ciągu x_n:

1 jeśli $x = x_k$ dla pewnego k

0 jeśli $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Z Pokrycia $\bigcup_{x \in K} K(x, r_x)$ zbioru K nie daje się zatem wybrać podpokrycia skończonego.

Odwrotna implikacja jest trudniejsza.

ⓐ Zbiór K zawiera podzbiór przeliczalny $\{y_k : k \in N\} \subset K$ t. że $K = \overline{\{y_k : k \in \mathbb{N}\}}$.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Niech $x_1 \in K$ będzie dowolnym elementem K. Jeśli $K \not\subset K(x_1, \frac{1}{n})$ to niech $x_2 \notin K(x_1, \frac{1}{n})$. Jeśli $K \not\subset K(x_1, \frac{1}{n}) \cup K(x_2, \frac{1}{n})$ to weźmy $x_3 \notin K(x_1, \frac{1}{n}) \cup K(x_2, \frac{1}{n})$ itd.

Po skończonej liczbie kroków proces się skończy. $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$. Biorąc wszystkie tak otrzymane x'y dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ dostaniemy zbiór $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ j.w.

GDYBY POWYŻSZY PROCES SIĘ NIE KOŃCZYŁ PO SKOŃCZONEJ LICZBIE KROKÓW, TO ODPOWIEDNIE x_n'y TWORZYŁYBY CIĄG Z KTÓREGO NIE DAŁOBY SIĘ WYBRAĆ PODCIĄGU ZBIEŻNEGO BO d(x_k,x_l)>1/n.

Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną kul o środkach w $\{y_k : k\in\mathbb{N}\}$ i promieniach wymiernych. $K(y_k,\varepsilon)\in\mathcal{B}$ dla $\varepsilon\in\mathbb{Q}$. Niech $\mathcal{C}$ będą tym kulami z $\mathcal{B}$ dla których istnieje $i\in I$ t. że $K(y_k,\varepsilon)\subset\Theta_i$. $\mathcal{C}$ zawiera przeliczalnie wiele kul. Zauważmy, że rodzina $\mathcal{C}$ pokrywa K. Rzeczywiście: $\forall x\in K$ istnieje $i\in I$ t. że $x\in\Theta_i$. Istnieje zatem $\varepsilon\in\mathbb{Q}$ $K(x,\varepsilon)\subset\Theta_i$. Skoro $\overline{\{y_k : k\in\mathbb{N}\}}=K$ to $\exists\, k\in\mathbb{N}: d(x,y_k)<\frac{\varepsilon}{3}$. W szczególności $K(y_k,\frac{2}{3})\subset K(x,\varepsilon)\subset\Theta_i$ oraz $x\in K(y_k,\frac{2}{3}\varepsilon)$.

Gdzie jesteśmy? $\mathcal{C}$ - pokrycie przeliczalne zbioru K i dla każdej $K(y_k,\varepsilon)$ istnieje $i\in I$ taki, że $K(y_k,\varepsilon)\subset\Theta_i$. W szczególności z pokrycia $\bigcup_{i\in I}\Theta_i$ można wybrać podpokrycie przeliczalne. Niech więc $K\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{\Theta}_n$ czyli K jest pokryte przez przeliczalną rodzinę zbiorów otwartych. Przypuśćmy, że z $\{\tilde{\Theta}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie można wybrać podpokrycia skończ. Skonstruujemy ciąg, który nie ma podciągu zbieżnego.

Niech $x_1 \in K$ będzie dowolnym elementem. 7
Istnieje $n_1 : x_1 \in O_{n_1}$. Niech $x_2 \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} O_i \neq \emptyset$
Istnieje $n_2 : x_2 \in O_{n_2}$. Niech $x_3 \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n_2} O_i \neq \emptyset$
etc. Przypuśćmy, że $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny do $x \in K$. Niech $n \in N : x \in O_n$.
Z konstrukcji (x_n) wynika, że istnieje K_n t. że $x_k \notin O_n$ dla $k > K_n$. W takim razie każdy podciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest od pewnego miejsca poza O_n. W szczególności $x \in O_n$ nie może być granicą podciągu ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Rzeczywiście, w przeciwnym przypadku $d(x, x_{k_m}) < \varepsilon$ dla dost. dużych m. Biorąc ε: $K(x, \varepsilon) \subset O_n$ widzimy, że $x_{k_m} \in O_n$ dla dostatecznie dużych m - sprzeczność. ☒