Twierdzenie spektralne w p-ni $\mathbb{C}^n$:

$\mathbb{C}$ - ciało liczb zespolonych

+ - dodawanie, $\cdot$ - mnożenie

P-ń $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} : z_i \in \mathbb{C} \right\}$ jest p-nią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$

Dodawanie wektorów po współrzędnych

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + w_1 \\ u_2 + w_2 \\ \vdots \\ u_n + w_n \end{bmatrix}$$

Mnożenie wektorów przez skalary

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{bmatrix}.$$

W przy $\mathbb{C}^n$ mamy naturalny iloczyn skalarny, który wektorom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ przyporządkowuje skalar $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ wzorem

$$(1) \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \ldots + \bar{u}_n v_n \in \mathbb{C}.$$

Uwaga: współrzędne u_i wchodzą do wzoru (1) ze sprzężeniami! Dlaczego? Iloczyn skalarny $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$ jest kwadzatem długości wektora $\mathbf{u}$.

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = \bar{u}_1 u_1 + \ldots + \bar{u}_n u_n$$

$$= |u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2 = \|u\|^2$$

Definicja: Długością wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ nazywamy liczbę $\sqrt[2]{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle}$ i oznaczamy $\|\mathbf{u}\|$.

Pytanie: Czy funkcja, która przyporządkowuje wektorowi $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ jego długość $\|\mathbf{u}\|$ ma dobre własności?

Przykład $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ – jest to tak zwane nierówność trójkąta.

Dowód $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ jest konsekwencją nierówności Cauchy'ego-Schwarza

Twierdzenie 1 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)
Dla wszystkich $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ mamy

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$ czyli

$$|\bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{u}_n v_n|^2 \leq (|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2) \cdot (|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2)$$

Przed udowodnieniem Twierdzenia 1 wprowadzimy pojęcie wektorów ortogonalnych

Definicja Jeśli iloczyn skalarny $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$

jest równy zero: $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0$ to mówimy, że wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ są ortogonalne (prostopadłe) i piszemy $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Przykład: Wektory $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ i $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ są ortogonalne.

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \bar{1}\cdot i + \bar{i}\cdot 1 = i - i = 0.$$

Ponadto $\|\mathbf{u}\|^2 = 1^2 + |i|^2 = 2 = \|\mathbf{v}\|^2$.

Obliczmy $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1+i \\ i+1 \end{bmatrix} \right\|^2 = |1+i|^2 + |i+1|^2$

$$= 2 + 2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Ogólniej: jeśli $u, v \in \mathbb{C}^n$ są ortogonalne to zachodzi **Twierdzenie Pitagorasa**

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Dowód

$$\langle u+v | u+v \rangle = \langle u+v | u \rangle + \langle u+v | v \rangle =$$

$$= \langle u|u \rangle + \underbrace{\langle v|u \rangle + \langle u|v \rangle}_{= 0} + \langle v|v \rangle =$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \blacksquare$$

Dowód nierówności C-S: $|\langle u|v \rangle| \overset{(*)}{\leq} \|u\| \cdot \|v\|$

Uwaga: jeśli $v = 0$ to $\underset{0}{\overset{\shortparallel}{}} \;=\; \underset{0}{\overset{\shortparallel}{}}$

Dalej rozważmy przypadek $v \neq 0$.

Zauważmy, że wektor $z = u - \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle} v$ spełnia $v \perp z$:

$$\langle v|z\rangle = \left\langle v \,\middle|\, u - \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle} v \right\rangle =$$

$$= \langle v|u\rangle - \left\langle v \,\middle|\, \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle} v \right\rangle =$$

$$= \langle v|u\rangle - \frac{\langle v|u\rangle}{\cancel{\langle v|v\rangle}} \cancel{\langle v|v\rangle} = \langle v|u\rangle - \langle v|u\rangle = 0$$

Twierdzenie Pitagorasa dla $u = \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle} v + z$

daje $\|u\|^2 = \left\| \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle} v + z \right\|^2 = \left\{ \lambda \overset{def}{=} \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle} \right\}$

$$= \|\lambda v + z\|^2 = \{\lambda v \perp z\} = \|\lambda v\|^2 + \|z\|^2$$

$$= |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \frac{|\langle v|u\rangle|^2}{|\langle v|v\rangle|^2} \|v\|^2 =$$

$$= \frac{|\langle v|u\rangle|^2}{(\|v\|^2)^2} \|v\|^2 = \frac{|\langle v|u\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

Zatem $|\langle v|u\rangle|^2 \leqslant \|v\|^2 \cdot \|u\|^2$. $\blacksquare$

Wniosek $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Rzeczywiście

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v | u+v \rangle =$$

$$= \langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle$$

$$= \langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \overline{\langle u|v\rangle} + \langle v|v\rangle$$

$$= \langle u|u\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle u|v\rangle + \langle v|v\rangle \underset{C.S.}{\leq}$$

$$\langle u|u\rangle + 2\,|\langle u|v\rangle| + \langle v|v\rangle \leq$$

$$\|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 =$$

$$(\|u\| + \|v\|)^2 \quad \blacksquare$$

Bazy ortonormalne.

Przykład: Baza kanoniczna.

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \ \ldots\ldots\ e_n = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

Zauważmy, że $\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$

Przykład: baza $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}}_{f_1},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}}_{f_2}$

$$\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$$

W szczególności $\|f_i\| = 1$.

liniowo niezależny

Definicja Mówimy, że układ wektorów $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{C}^n$ jest bazą ortonormalną p-ni $\mathbb{C}^n$ jeśli $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$.

Uwaga: Dodanie $\underbrace{\text{liniowo niezależny}}$ jest zbędne: jeśli mamy niezerowe wektory $u_1, \dots, u_k$ t. że $\langle u_i | u_j \rangle = 0$ $i \neq j$. to układ $\{u_1, \dots, u_k\}$ jest lnz.

Rzeczywiście: jeśli $\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_k \cdot u_k = 0$

to $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$; przykładowo

$$0 = \langle u_1 | \lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_k \cdot u_k \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle u_1 | u_i \rangle =$$

$$= \lambda_1 \langle u_1 | u_1 \rangle = \lambda_1 \cdot \|\cancel{u_1}\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Podobnie $\lambda_2 = 0$ .... $\lambda_k = 0$.