Szeregi Fouriera a całkowalność z kwadratem

Dla $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ całkowalnych w sensie Riemanna definiujemy $\langle f | g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) g(t) dt$ oraz $\|f\|_{L^2} := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

Uwaga: Jeśli $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jest ciągła to $\|f\|_{L^2}$ spełnia warunki z definicji normy, t.zn

$\|f + \hat{f}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|\hat{f}\|_{L^2}$ dla wszystkich $f, \hat{f}$

$\|\lambda f\|_{L^2} = |\lambda| \, \|f\|_{L^2}$ dla wszystkich λ & f

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ dla $t \in [-\pi, \pi]$

wynika z nierówności Cauchy-Schwarza
$|\langle f | \hat{f} \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|\hat{f}\|_{L^2}$

ten warunek nie jest spełniony bez założenia ciągłości f. Na przykład $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ dana wzorem $f(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ jest całkowalna na $[-\pi, \pi]$ ale $\|f\|_{L^2} = 0$.

Niech $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ będzie funkcją daną wzorem $e_n(t) = e^{int}$. Zauważmy, że $\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$

Zatem układ $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ jest ortonormalny.

Zauważmy, że dla $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jej N-tą sumę częściową szeregu Fouriera $S_N f(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int}$ można zapisać w postaci

$$\sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e_n = \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \, e_n = \sum_{-N}^{N} \langle e_n | f \rangle_{L^2} e_n$$

Skoro $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tworzą układ ortonormalny to $S_N f$ jest rzutem ortogonalnym na p-ń rozpiętą przez $\{e_{-N}, e_{-N+1}, \dots, e_N\}$.

W szczególności zachodzi wzór

$$\|f - S_N f\|^2_{L^2} = \|f - \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e_n\|^2_{L^2} = \langle f - \sum_{-N}^{+N} \hat{f}(n) e_n \,|\, f - \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e_n \rangle \underset{\text{tw. Pitag.}}{=}$$

$$= \langle f | f \rangle_{L^2} - \sum_{-N}^{+N} |\hat{f}(n)|^2$$

Naszym celem jest wykazanie, że dla $f [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ całkowalnej zachodzi

Twierdzenie ①

① $\lim_{N \to \infty} \|f - S_N f\|_{L^2} = 0$

② $\|f\|^2_{L^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$ – tożsamość Parsevala.

Przy okazji dowodu powyższego twierdzenia nauczymy się aproksymować jednostajnie funkcje ciągłe wielomianami trygonometrycznymi. Wiadomo, że $S_N f$ jest wielomianem trygonometrycznym. Jednak nie zawsze $S_N f \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} f$. Jak to naprawić?

Rozważmy funkcję $F_N : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ daną wzorem $F_N(s) = \frac{1}{N+1} (D_0(s) + D_1(s) + \ldots + D_N(s))$

gdzie $D_N(s) = \sum_{-N}^{+N} e^{ins}$ ← nazwy: F_N jądro Fejera, D_N jądro Dirichleta

Lemat:
Jądro Fejera ma następujące własności

① $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_N(t) = 1$ ② $\forall_{\delta > 0} \sup_{\pi \geq |t| \geq \delta} F_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}$

Dowód

① łatwo wynika ze wzoru $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s) = 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}$.

② Przypomnienie

$$D_k(t)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.$$

$$\Rightarrow (N+1)\,F_N(t)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=0}^{N}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$= \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{N} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t} = \operatorname{Im}\left(e^{\frac{it}{2}}\,\frac{e^{i(N+1)t}-1}{e^{it}-1}\right)$$

↖ ciąg geometryczny

$$= \operatorname{Im} e^{i\frac{(N+1)t}{2}}\,\frac{e^{i\frac{N+1}{2}t}-e^{-i\frac{N+1}{2}t}}{e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\operatorname{Im} e^{i\frac{N+1}{2}t}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}$$ A więc

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\,\frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \quad t\neq 0 \quad \& \quad F_N(0) = N+1$$

Stąd łatwo wynika ②.

Twierdzenie Fejera

Niech $f\in C[-\pi,\pi]$ t. że $f(-\pi)=f(\pi)$. Połóżmy $\sigma_N f = \frac{s_0 f + s_1 f + \ldots + s_N f}{N+1}$. Wówczas ciąg wielomianów trygonometrycznych $\sigma_N f$ zbiega jednostajnie do f.

Dowód: Dla funkcji $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowej (ciągłej) t. że $\tilde{f}|_{[-\pi,\pi]} = f$ mamy wzór

$S_k f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t-s) D_k(s) ds$ - poprzedni wykład

Zatem $\sigma_N(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t-s) F_N(s) ds$.

Czyli $|f(t) - (\sigma_N f)(t)| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s) ds = 1\right\} =$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)) F_N(s) ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \underbrace{F_N(s)}_{\geq 0} ds \quad (*)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skoro f jest jednostajnie ciągła to istnieje $\delta > 0$: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $|x-y| < \delta$

Z drugiej strony

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|s|<\delta} |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(s)| F_N(s) ds + \int_{\pi \geq |s| \geq \delta} |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(s)| F_N(s) ds\right.$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|s|<\delta} F_N(s) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\sup|f|}{(N+1)\sin^2(\frac{\delta}{2})} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{2\sup|f|}{(N+1)\sin^2(\frac{\delta}{2})}}_{\text{nie zależy od } t}$$

oraz dla $N \to \infty$ drugi człon $\to 0$.

Stąd $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ że dla $n > N$ i $t \in [-\pi, \pi]$ mamy $|\sigma_N f(t) - f(t)| < \varepsilon$. Co kończy dowód ∎

Dowód twierdzenia 1

Jeśli $f \in C[-\pi, \pi]$ i $f(\pi) = f(-\pi)$ to z tw Fejera mamy $\|f - \sigma_N f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - (\sigma_N f)(t)|^2 dx \leq$

$\sup_{[-\pi,\pi]} |f(t) - (\sigma_N f)(t)|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Z drugiej strony $s_N f$ jest rzutem ortogonalnym na wielomiany trygonometryczne st $\leq N$.
Skoro $\sigma_N f$ jest wielomianem trygonometrycznym stopnia N oraz $\|f - s_N f\|^2_{L^2} = \inf\limits_{\substack{w\text{- wiel.} \\ \text{trg. st.} \leq N}} \|f - w\|_{L^2}$ to Patrz następny Lemat.

$$\|f - s_N f\|^2_{L^2} \leq \|f - \sigma_N f\|^2_{L^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \quad *$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $\|f - s_N f\|^2_{L^2} = \|f\|^2_{L^2} - \sum\limits_{-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2$ czyli z powyższego wzoru (*) mamy $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2_{L^2}$.

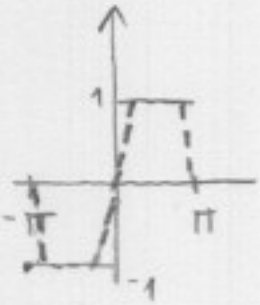
Co zrobić gdy f jest jedynie całkowalna? W pierwszej kolejności znajdujemy funkcję schodkową g taką, że $\|f-g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$ (*)
Dlaczego taka istnieje? Dowodząc Lemat Riemanna-Lebesgue'a wykazaliśmy, że istnieje funkcja $\tilde{g}$ schodkowa taka, że $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f - \tilde{g}| < \tilde{\varepsilon}$. Zauważmy, że
dowolne $\tilde{\varepsilon}$

$$\|f-\tilde{g}\|^2_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-\tilde{g}|^2(t)\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-\tilde{g}|(t) \cdot \sup_{[-\pi,\pi]} |f-\tilde{g}|\,dt \leq$$

$$\sup_{[-\pi,\pi]}\left(|f| + |\tilde{g}|\right) \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-\tilde{g}|(t)\,dt \leq \left\{ \begin{array}{c} |\tilde{g}(s)| \leq \sup\limits_{[-\pi,\pi]} |f| \\ \text{tak wybraliśmy} \\ \tilde{g} \text{ w. Lemacie R-L} \end{array} \right\} \leq 2 \sup |f| \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f - \tilde{g}|\,dt \leq 2 \sup|f| \cdot \tilde{\varepsilon}$$ Czyli biorąc $\tilde{\varepsilon}$ t. że $\sqrt{2\sup|f|\,\tilde{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{3}$ dostajemy $g = \tilde{g}$ jak w (*)

Dalej niech $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją kawałkami liniową ciągłą spełniającą $h(-\pi) = h(\pi)$ oraz $\|g - h\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$.
Jak taką znaleźć? Jak na rysunku, np.:



g - schodkowa nieciągła w 0

- linią przerywaną narysowaliśmy h.

Dla dowolnej g każdy skok g "obsługujemy" analogicznie.

Mając już g jak wyżej oraz h dla której zachodzi teza twierdzenia dostajemy

$$\|f - s_N f\|_{L^2} \leqslant \|f - s_N h\|_{L^2} \leqslant \|f - g\|_{L^2} + \|g - h\|_{L^2} + \|h - s_N h\|_{L^2}$$

patrz Lemat poniżej

$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|h - s_N h\|_{L^2}$. Istnieje N_0 : $N > N_0$ $\|h - s_N h\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ więc dla takich N

$\|f - s_N f\|_{L^2} \leqslant \varepsilon$. ■

Lemat: Niech W będzie p-nią wektorową z iloczynem skalarnym, $V \subset W$ będzie podprzestrzenią oraz $P : W \to W$ będzie rzutem ortogonalnym na V. Wówczas dla $w \in W$ oraz $v \in V$ spełniona jest nierówność $\|w - Pw\| \leq \|w - v\|$.

Dowód.

$$\|w-v\|^2=\|w-Pw+Pw-v\|^2 \overset{Pv=v \text{ bo } v\in V}{=} \|(1-P)w+P(w-v)\|^2$$

$$=\|(1-P)w\|^2+\|P(w-v)\|^2 \geqslant \|(1-P)w\|^2=\|w-Pw\|^2 \quad \blacksquare$$

bo $(1-P)w \perp P(w-v)$ + Tw Pitagorasa

Uwaga

Zauważmy, że jeśli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ciągła 2π okresowa taka, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \hat{f}(n)=0$ to $f\equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

Rzeczywiście z twierdzenia Fejera wiemy, że $\sigma_N f \underset{N\to\infty}{\rightrightarrows} f$. Z drugiej strony jeśli $\hat{f}(n)=0$, $n\in\mathbb{N}$ to $S_k f(t)=\sum_{n=-k}^{k}\hat{f}(n)e^{int}=0$

Czyli $\sigma_N f=\frac{1}{N+1}\left(S_0 f+\ldots+S_N f\right)=0$ a więc $f\equiv 0$.

Rozważmy p-ń $\ell^2(\mathbb{Z})=\{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2<\infty\}$

Wprowadźmy w $\ell^2(\mathbb{Z})$ iloczyn skalarny

$$\langle (a_n)\,|\,(b_n)\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\bar{a}_n b_n.$$

Odwzorowanie z p-ni funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ 2π okresowych do $\ell^2(\mathbb{Z})$ które funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ przypisuje $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ jest różnowartościowe i zachowuje iloczyn skalarny.

Nie jest bowiem "na". Czyli nie jest bijekcją.