$A:\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ - liniowe $\quad A(\alpha x + \tilde\alpha \tilde x) = \alpha Ax + \tilde\alpha A\tilde x$

Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego.

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i\in\{1,\dots,l\} \\ j\in\{1,\dots,k\}}} = \begin{bmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1k} \\ a_{21}, & \dots, & a_{2k} \\ \vdots & & \\ a_{l1}, & \dots, & a_{lk} \end{bmatrix} \in M_{l\times k}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{l\cdot k}$$

i ← wiersze, j ← kolumny

Odwzorowania liniowe <u>są ciągłe</u>.

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{lk}x_k \end{bmatrix}$$ - ciągła zależność od $x_1, \dots, x_k$.

Skoro A - ciągła, $\overline{K(0,1)}$ - zwarte to $A(\overline{K(0,1)}) = \{Ax : \|x\| \le 1\}$ jest zwartym zbiorem w $\mathbb{R}^l$. Zdefiniujmy normę $\|A\|$ odw. (liniowego) A: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$.

Własności A:

① Dla $v \in \mathbb{R}^k$: $\|Av\| \le \|A\|\,\|v\|$

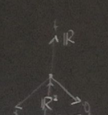
Rzeczywiście: $v \ne 0$ to $\left\|A\frac{v}{\|v\|}\right\| \le \|A\|$

② $A, \tilde A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ $\quad \|\alpha A + \tilde\alpha \tilde A\| \le |\alpha|\,\|A\| + |\tilde\alpha|\,\|\tilde A\|$

③ $B: \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}^k$ - liniowe, $A\cdot B: \mathbb{R}^j \longrightarrow \mathbb{R}^l$ - liniowe i $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

$$\boxed{\|AB\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|ABx\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|A\|\,\|Bx\| = \|A\|\cdot\sup_{\|x\|\le 1}\|Bx\| = \|A\|\cdot\|B\|}$$

Przykład $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ne \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \text{dla } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$



Zauważmy, że $f(x,0) = 0 = f(0,y)$

$f(t,t) = \frac{tt}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$ zatem f nie jest ciągła w punkcie $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ogólniej $f(t,kt) = \frac{kt^2}{t^2+t^2k^2} = \frac{k}{1+k^2}$

Wniosek f nie jest ciągła w p-cie $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Poza $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ f jest funkcją ciągłą.

Definicja $f: \mathbb{R}^k \supset A \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest jednostajnie ciągła na A jeśli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}$ $\|x-y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$.

Równoważnie: jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t. że $x_n - \tilde x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ to $f(x_n) - f(\tilde x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Twierdzenie Odwzorowanie $f: K \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ciągła, gdzie $K \subset \mathbb{R}^k$ jest zbiorem zwartym, jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym.

Dowód: Podobny do dowodu 1-wymiarowej wersji tego twierdzenia.

Przykład:

Pochodne cząstkowe $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \dots\\ 0 & \dots\end{cases}$

Dla $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\neq 0$: $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)= \dots$ $x\leftrightarrow y$

Dla $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$. $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$

$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}= \dots = 0.$

Pochodne kierunkowe f w p-cie $a=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ w kierunku wektora $v=\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}$

Notacja $\frac{\partial}{\partial v}f(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\xi,t\eta)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\xi\eta}{t^2(\xi^2+\eta^2)}\frac{1}{t}$

$\to \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$ – granica nie istnieje. $\frac{\partial}{\partial v}f(0,0)$ – nie istnieje

Inny przykład: funkcja która nie jest ciągła w $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ale ma pochodne kierunkowe w $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ 0 & \text{dla } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\end{cases}$

g nie jest ciągła w 0: $g(t,t^2)=\frac{t^2\cdot t^2}{t^4+t^4}=\frac{1}{2}\neq 0.$

$\frac{\partial}{\partial v}g(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t\xi,t\eta)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^2\xi^2 t\eta}{t^4\xi^4+t^2\eta^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\xi^2\eta}{t^3(t^2\xi^4+\eta^2)}=\frac{\xi^2\eta}{\eta^2}=\frac{\xi^2}{\eta}$

dla $\eta\neq 0$

dla $\eta=0$ $\frac{\partial}{\partial v}f(a)=0.$

Definicja. Niech $f: O\to\mathbb{R}^l$, gdzie $O\subset\mathbb{R}^k$ jest otwarty i niech $a\in O$. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $a\in O$ jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $A:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^l$ t. że

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|}\overset{(*)}{=}0.$$

Uwaga: $k=l=1$ oraz $g: O\to\mathbb{R}$: g - różn. w a jeśli istnieje $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$. Zauważmy, że kładąc $A=g'(a)$ dostajemy

$0=\lim_{h\to 0}\left|\frac{g(a+h)-g(a)}{h}-A\right|=\lim_{h\to 0}\frac{|g(a+h)-g(a)-Ah|}{|h|}$ – analog (*).

Pytanie czy notacja $A=f'(a)$ ma sens?

Okazuje się, że A t.j. w (*) jest tylko jedno i notacja ma sens!

Notacja reszty: oznaczenie $r(a;h)=f(a+h)-f(a)-Ah$

Wiemy, że $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|r(a,h)\|}{\|h\|}=0$. Wstawmy $h=t\cdot v$ gdzie $t\to 0$

$\Rightarrow 0=\lim_{\|tv\|\to 0}\frac{\|r(a;tv)\|}{|t|\cdot\|v\|}=\frac{1}{\|v\|}\lim_{t\to 0}\frac{\|f(a+tv)-f(a)-tAv\|}{|t|}=$

$\frac{1}{\|v\|}\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}-Av\right\|$ Stąd $\frac{\partial}{\partial v}f(a)=Av.$

A jest jedn. wyznaczone

$f'(a)\overset{ozn}{=}A$

$\boxed{Av=\frac{\partial}{\partial v}f(a)}$

Notacja $\frac{\partial}{\partial v} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\ldots)}{t}$ ... $\lim_{t\to 0} \frac{\ldots}{t^2(\xi^2+\eta^2)} \frac{1}{t}$

<u>Przykład</u> $f: O \to \mathbb{R}^l$ $\quad f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_k) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$

$$f'(a) = \left[a_{ij} \right]_{\substack{i \in \{1, \ldots, l\} \\ j \in \{1, \ldots, k\}}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} f_i (a_1, \ldots, a_k) \right]$$ – macierz Jacobiego.

Udowodnimy, że $a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i (a_1, \ldots, a_k)$ (dla) pochodnej