$f : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^\ell$

$\begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k) \\ f_\ell(x_1, \dots, x_k) \end{bmatrix}$

$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) \in \mathbb{R}^\ell$ - poch. cząstkowa

$\frac{\partial}{\partial v} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^\ell$ - poch. kier. wzdłuż wektora $v \in \mathbb{R}^k$.

$a \xrightarrow{tv} a+tv$

$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = \frac{\partial}{\partial e_i} f(a)$ $\quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ i-ty wiersz.

Pochodna (mocna): $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell) \simeq M_{\ell \times k}(\mathbb{R})$

(*) $f(a+h) - f(a) \simeq A \cdot h$ t. zn. $r(a,h) := f(a+h) - f(a) - A h$

$\frac{\| r(a,h) \|}{\| h \|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0.$

Oznaczenie $A = f'(a)$ $\quad A = [a_{ij}]$

Jeśli f jest różniczkowalna to $\frac{\partial}{\partial h} f(a) = f'(a) \cdot h$.

Macierz Jacobiego pochodnej f w p-cie a.

$$A e_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\ell j} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial e_j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_\ell(a) \end{bmatrix}$$

Zatem $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

W szczególności, $f(a+h) - f(a) \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

<u>Przykład</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. $\quad k=2 \quad \ell=1 \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

f jest różniczkowalna dla każdego $a \in \mathbb{R}^2$ oraz

$f'(a) \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ $\quad f'(a) = \left[-2x e^{-x^2-y^2}, -2y e^{-x^2-y^2}\right](a) = \left[-2a_1 e^{-a_1^2-a_2^2}, -2a_2 e^{-a_1^2-a_2^2}\right]$

<u>STW</u> Jeśli $f, g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^\ell$ są różniczkowalne w $a \in \mathcal{O}$ to

$f+g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^\ell$ jest różniczkowalne oraz $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Dowód: proste ćwiczenie.

<u>Twierdzenie</u> Niech $g : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^\ell$ i $f : \mathbb{R}^\ell \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$

takimi, że $g(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$ oraz niech $a \in \mathcal{O}$. Jeśli

f jest różniczkowalna w a i g jest różniczkowalna w

$b = g(a)$ to $f \circ g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $a \in \mathcal{O}$

oraz $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

mnożenie macierzy.

Dowód: Przypomnienie: <u>norma</u> macierzy $\|C\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Cv\|$.

$\forall w \quad \underline{\|Cw\| \leq \|C\| \cdot \|w\|}$

$r_g(a,h)$

$r_f(b,v)$

$$(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a) =$$

$$= f(g(a+h)) - f(g(a)) = f'(b)\big(g(a+h)-g(a)\big) + r_f\big(b, g(a+h)-g(a)\big)$$

$$= f'(b)\big(g'(a)\cdot h + r_g(a,h)\big) + r_f\big(b, g(a+h)-g(a)\big)$$

$$= \underbrace{f'(b)\cdot g'(a)h}_{\text{Czy to jest pochodna } f\circ g} + \underbrace{\underset{(1)}{f'(b)\, r_g(a,h)} + \underset{(2)}{r_f\big(b, g(a+h)-g(a)\big)}}_{\text{Czy jest to reszta } f\circ g}$$

Czy to jest pochodna $f\circ g$ $\leftrightarrow$ Czy jest to reszta $f\circ g$

Uwaga: Skoro g jest różniczkowalna w $a\in\mathcal{O}$ to g jest ciągła w a.

$\|g(a+h)-g(a)\| = \|r_g(a,h)\|\,\|h\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$

(1) $$\frac{\|f'(b)\, r_g(a,h)\|}{\|h\|} \leqslant \|f'(b)\| \cdot \frac{\|r_g(a,h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

(2) $$\frac{\|r_f(b, g(a+h)-g(a))\|}{\|h\|} = \frac{\|r_f(b, g(a+h)-g(a))\|}{\|g(a+h)-g(a)\|}\, \frac{\|g(a+h)-g(a)\|}{\|h\|} =$$

ograniczone

$$\frac{\|g(a+h)-g(a)\|}{\|h\|} = \frac{\|g'(a)h + r_g(a,h)\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|g'(a)h\|}{\|h\|} + \frac{\|r_g(a,h)\|}{\|h\|} \leqslant \|g'(a)\| + \frac{\|r_g(a,h)\|}{\|h\|}$$

$h\to 0$: $\frac{\|r_g(a,h)\|}{\|h\|} \to 0$

$\leqslant \|g'(a)\| + 1$ dla dostatecznie małych $\|h\|$.

Twierdzenie Przypuśćmy, że $f: \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^l$ ma na $\mathcal{O}$ pochodne cząstkowe oraz $\forall_j\ \frac{\partial f}{\partial x_j}: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^l$ jest ciągła. Wówczas funkcja f jest różniczkowalna we wszystkich punktach $a\in\mathcal{O}$.

Dowód przeprowadzimy dla $f(x,y)\in\mathbb{R}$ $(k=2,\ l=1)$.

Ustalmy $a\in\mathcal{O}$, $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ i niech $h=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$. Pytanie: Czy $f(a+h)-f(a) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2$.

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) = \underbrace{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2)}_{} + \underbrace{f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2)}_{}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} F_1(t) = f(a_1+t, a_2+h_2) \\ F_2(t) = f(a_1, a_2+t) \end{array} \right\} = F_1(h_1) - F_1(0) + F_2(h_2) - F_2(0).$$

$$\xrightarrow[\text{średniej}]{\text{tw. o wartości}} F_1'(\theta_1 h_1)h_1 + F_2'(\theta_2 h_2)\cdot h_2 \quad \{\text{gdzie } \theta_i \in\,]0,1[\,.\}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2)\cdot h_2$$

Pytanie Czy $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)h_2$ jest resztą.

Wiemy, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ jeśli $\|\tilde{h}\| < \delta$ to

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\hat{h}) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a+\hat{h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \leq \varepsilon$$

Przyjmijmy, że $\|h\| < \delta$. Skoro $\left\|\begin{bmatrix}\theta_1 h_1 \\ h_2\end{bmatrix}\right\| \leq \delta$ i $\left\|\begin{bmatrix}h_1 \\ \theta_2 h_2\end{bmatrix}\right\| < \delta$ to

$$\frac{|(**)|}{\|h\|} \leq \frac{\varepsilon|h_1| + |\varepsilon| \cdot |h_2|}{\|h\|} = \varepsilon \cdot \frac{|h_1| + |h_2|}{\|h\|} = \varepsilon \frac{|h_1| + |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \varepsilon \frac{\sqrt{2}(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$= \sqrt{2} \cdot \varepsilon$, co pokazuje, że $(**) = r_f(a, h)$ zatem

f jest różniczkowalna w a.

Do pokazania została nierówność $\frac{|h_1| + |h_2|}{\sqrt{2}} \leq (h_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}$? $\Big|^2$

$$\frac{h_1^2 + h_2^2 + 2|h_1||h_2|}{2} \overset{?}{\leq} h_1^2 + h_2^2 \iff \frac{h_1^2 + h_2^2 - 2|h_1||h_2|}{2} \geq 0 \iff \frac{(|h_1| - |h_2|)^2}{2} \geq 0$$

Wniosek: funkcja $e^{-x^2-y^2}$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$

i $f'(x,y) = \underbrace{e^{-x^2-y^2}}_{\text{"macierz" } 1\times 1 \text{ pochodnej odwz. } \mathbb{R} \ni t \mapsto e^t \text{ w } t=-x^2-y^2} \cdot \underbrace{[-2x, -2y]}_{\text{macierz } 1\times 2 \text{ pochodnej odwz. } (x,y) \mapsto -x^2-y^2}$

$$(x,y) \xmapsto{f_2} -x^2-y^2 \xmapsto{f_1} e^{-x^2-y^2}.$$

$$f(x,y) = f_1 \circ f_2(x,y) =$$

$$f(-x^2-y^2) = e^{-x^2-y^2}$$

Ogólnie: reguła łańcucha dla pochodnej złożenia

$f: \mathbb{R}^l \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ i $g: \mathcal{O} \supset \mathbb{R}^k \to \mathcal{U}$

to $(f \circ g)(x_1, \ldots, x_k) = f(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_l(x_1, \ldots, x_k))$

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_k) \\ \vdots \\ g_l(x_1, \ldots, x_k)\end{bmatrix}$$

$$f(y_1, \ldots, y_l)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_l(x_1, \ldots, x_k)) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_l}\right](g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_l(x_1, \ldots, x_k)) \cdot \begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_j}\end{bmatrix}(x_1, \ldots, x_k)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_l}\frac{\partial g_l}{\partial x_j}\right)(x_1, \ldots, x_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

zmieniając notację $g_i(x_1, \ldots, x_k) = y_i(x_1, \ldots, x_k)$ dostajemy regułę łańcucha

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_k)$$