Funkcja wykładnicza i logarytm. ①

Motywacja: dla $a>0$ i $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ definiujemy

$a^x = (a^{\frac{1}{q}})^p = \underbrace{a^{\frac{1}{q}}\ldots a^{\frac{1}{q}}}_{p\text{-razy}}$. Cel: zdefiniować a^x dla dowolnej liczby $x\in\mathbb{R}$ (x może być niewymierna).

② Określić logarytm, tzn znaleźć funkcję $\log_a y$ taką że $a^{\log_a y}=y$.

Lemat (O ciągach szybko zbieżnych do 1).

Jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia $n\cdot a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ to $(1+a_n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Dowód: Przypominamy nierówność Bernoulliego

Jeśli $1+x>0$ to $(1+x)^n \geq 1+nx$.

W szczególności $(1+a_n)^n \geq 1+na_n$

Oraz $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n = \left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n \geq 1-\frac{na_n}{1+a_n}$.

Ostatecznie $1+na_n \leq (1+a_n)^n \leq 1-\frac{na_n}{1+a_n}$

Zauważmy, że $\frac{na_n}{1+a_n} \longrightarrow \frac{0}{1}=0$.

Z tw o 3 ciągach mamy tezę.

Twierdzenie Dla każdego $x\in\mathbb{R}$ ciąg $a_n(x)=$ jest zbieżny do granicy $a(x)\in\mathbb{R}$, która m[a] następujące własności

(E1) $a(x)>0$ dla $x\in\mathbb{R}$ oraz $a(0)=1$

(E2) $a(x)a(y)=a(x+y)$

(E3) $a(x)\geq 1+x$ dla $x\in\mathbb{R}$

(E4) jeśli $x<y$ to $a(x)<a(y)$

(E5) jeśli $x<1$ to $a(x)<\frac{1}{1-x}$

(E6) $|a(x) - 1 - x| \leq 2|x^2|$ dla $|x| \leq \frac{1}{2}$ (2)

(E7) jeśli $x_n \to x$ to $a(x_n) \to a(x)$

(E8) jeśli $h_n \to 0$ i $h_n \neq 0$ to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(x+h_n) - a(x)}{h_n} = a(x).$$

Dowód Niech $n > |x|$. Zauważmy, że

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{(n+1+x)\cdot n}{(n+x)(n+1)}\right]^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \geq \left(1-\frac{x}{n+x}\right)\frac{n+x}{n} = 1$$

$(n+1+x)n = (n+1)(n+x) - x$ Czyli ciąg rośnie.

Jeśli $x < 0$ to $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1$ a więc

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest ograniczony przez 1.

Czyli zbieżny oraz $a(x) \geq a_m(x) > 0$, $|x| < m$.

Dla $x > 0$ mamy

$$a_n(x) \cdot a_n(-x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \text{ oraz}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)} = \frac{1}{a(x)} \quad \text{czyli } a(x) = \frac{1}{a(-x)}$$

i widzimy, że $a(x) > 0$.

$$\frac{a(x)\cdot a(y)}{a(x+y)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}\right)^n} =$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{xy}{n^2\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}\right)^n = 1 \quad \text{bo}$$

$$n\,\frac{xy}{n^2\left(1+\frac{x+y}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dalej z nierówności Bernoulliego $a_n(x) \geq 1+x$ dla $n > |x|$ to po przejściu granicznym $a(x) \geq 1+x$.

Niech $x > y$. Wtedy $a(x) - a(y) = a(y)\left(a(x-y) - 1\right) \geq 1+x-y-1 = x-y > 0$.

Zauważmy, że $a(-x) \geq 1-x \Rightarrow$ dla $1-x > 0$

$$a(x) = \frac{1}{a(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Dla $|x| < \frac{1}{2}$ mamy

$$0 \leq a(x) - 1 - x \leq \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2$$

Niech $x_n \to x$.

Oznaczmy $r_n = x_n - x$. Zauważmy, że

$$0 \leq |a(r_n) - 1| = |a(r_n) - 1 - r_n| + |r_n| \leq 2r_n^2 + |r_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$|a(x) - a(x_n)| = |a(x)|\,|a(x_n - x) - 1| \to 0.$$

Ostatnia nierówność

$$\left|\frac{a(x+h_n) - a(x)}{h_n} - a(x)\right| = |a(x)| \cdot \left|\frac{a(h_n) - 1 - h_n}{h_n}\right| \leq a(x)\,\frac{2h_n^2}{h_n} \xrightarrow[h_n\to 0]{} 0$$

Dla $y \in \mathbb{R}_+$ istnieje dokładnie jedna liczba $x \in \mathbb{R}$ t. że $a(x) = y$.

Szkic dowodu:

$x \leq 1$ mamy $0 \leq a(x) \leq \frac{1}{1-x}$ czyli dla $x \to -\infty$ $a(x) \to 0$.

Podobnie, skoro $a(x) \geq 1+x$ to dla $x \to \infty$ mamy $a(x) \to \infty$. Czyli a jest ciągła i przyjmuje wszystkie wartości między 0 i ∞.