(1)

Wykład 7

Co wiemy? Niech $f: \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \xrightarrow{\text{postać } f} \mathbb{R}^l$. $f(x_1,\dots,x_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,\dots,x_k) \\ \vdots \\ f_l(x_1,\dots,x_k) \end{bmatrix}$

ⓐ Jeśli na $\mathcal{O}$ istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ i są ciągłe to f ma pochodną na $\mathcal{O}$ oraz $f'(a) = \left[\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,k}}$ ← wiersze, ← kolumny

ⓑ Jeśli na $\mathcal{O}$ istnieją drugie pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}$ i są ciągłe to f ma 2-gą pochodną na $\mathcal{O}$ i $f''(a)$ jest odwzorowanie 2-liniowym z $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$.

Pytanie: jak myśleć o odwzorowaniach 2-liniowych? Dla $l=1$ już wiemy!

$$f''(a)(h,\tilde{h}) = \left([h_1,\dots,h_k]\left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_j \partial x_{j'}}\right]_{j,j'=1,\dots,k}\begin{bmatrix}\tilde{h}_1\\ \vdots \\ \tilde{h}_k\end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}$$

↑ macierz odwzorowania 2-liniowego (kwadratowa $k \times k$)

Ogólniej: Niech $e_1,\dots,e_l$ będzie bazą kanoniczną przy $\mathbb{R}^l$ $e_i = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$ ← i-ty wiersz. i niech

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot e_i$$

Wtedy $f''(a)(h,\tilde{h}) = \sum_{i=1}^{l}\left([h_1 \dots h_k]\left[\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j \partial x_{j'}}\right]\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots \\ h_k\end{bmatrix}\right)e_i$

czyli $f''(a)(h,\tilde{h}) \in \mathbb{R}^l$.

Zauważmy, że (patrz Twierdzenie Schwarza wykład 6) jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}$ są ciągłe na $\mathcal{O}$ to $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j'} \partial x_j}(a)$. Ta równość przekłada się na symetrię
$$f''(a)(h, \tilde{h}) = f''(a)(\tilde{h}, h)$$
dla wszystkich $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^k$. Innymi słowy odwzorowanie 2-liniowe $f''(a) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest symetryczne. Okazuje się, że druga pochodna (jeśli istnieje) jest symetryczna.

Twierdzenie 1 (symetria drugiej pochodnej) Załóżmy, że pochodna f' jest określona w każdym punkcie zbioru otwartego $\mathcal{O}$. Jeśli $f''(a) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$ istnieje w pewnym punkcie a zbioru $\mathcal{O}$ to
$$f''(a)(h, \tilde{h}) = f''(a)(\tilde{h}, h)$$
dla wszystkich $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^k$.

Dowód twierdzenia 1 wykorzystuje poniższy

Lemat 2. Niech $f : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^l$. Załóżmy, że dla pewnych $x, y \in \mathcal{O}$ odcinek $[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0,1]\}$ jest zawarty w $\mathcal{O}$ i f różniczkowalna na $[x, y]$. Wówczas $\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| \cdot \sup_{\xi \in [x,y]} \|f'(\xi)\|$.

Iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^\ell$

$\langle h | \tilde{h} \rangle := h_1 \tilde{h}_1 + \ldots + h_\ell \tilde{h}_\ell \in \mathbb{R}$. $\quad \langle h | h \rangle = \|h\|^2$

Wiadomo, że $\langle h | \tilde{h} \rangle = \cos(\measuredangle(h, \tilde{h})) \cdot \|h\| \cdot \|\tilde{h}\|$.

W szczególności $|\langle h | \tilde{h} \rangle| \leq \|h\| \, \|\tilde{h}\|$

Przechodzimy do zasadniczej części dowodu lematu: rozważmy funkcję

$$g(t) = f(x + t(y-x)) - f(x) \in \mathbb{R}^\ell \qquad t \in [0,1].$$

$$\phi(t) = \langle g(1) | g(t) \rangle \in \mathbb{R}$$

Zauważmy, że $\phi(1) = \langle g(1) | g(1) \rangle = \|f(y) - f(x)\|^2$

oraz $\phi(0) = \langle g(1) | g(0) \rangle = \langle g(1) | \vec{0} \rangle = 0$.

Czyli $\|f(y) - f(x)\|^2 = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\Theta)$ dla

pewnego $\Theta \in]0,1[= \frac{d}{dt} \langle g(1) | g(t) \rangle \big|_{t=\Theta} =$

$$\langle g(1) | \frac{d}{dt} g(t) \rangle \Big|_{t=\Theta} = \langle g(1) | f'(\xi_\Theta) \cdot (y-x) \rangle =$$

$\xi_\Theta = x + \Theta(y-x)$

pochodna funkcji złożonej

$\langle f(y) - f(x) | f'(\xi_\Theta)(y-x) \rangle \leq \|f(y) - f(x)\| \cdot \|f'(\xi_\Theta)(y-x)\| \leq \|f(y)-f(x)\| \, \|f'(\xi_\Theta)\| \, \|y-x\| \leq \|f(y)-f(x)\| \sup_{\xi \in [x,y]} \|f'(\xi)\| \cdot \|y-x\|$

$\leq \|f(y) - f(x)\| \; \|f'(\xi_\Theta)\| \; \|y-x\| \leq \|f(y)-f(x)\| \ldots$

Skracając po jednej potędze $\|f(y) - f(x)\|$ z obu stron nierówności dostajemy tezę lematu $\boxtimes$

Dowód twierdzenia 1.

Ustalmy $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^k$. Niech $M := \max(\|h\|, \|\tilde{h}\|)$.

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą dwóch zmiennych

$$\phi(s,t) = f(a+th+s\tilde{h}) - f(a+th) - f(a+s\tilde{h}) + f(a) - ts f''(a)(h,\tilde{h})$$

Lemat 2

Zauważmy, że $\phi(0,t) = 0$

W szczególności: $\|\phi(s,t)\| = \|\phi(s,t) - \phi(0,t)\| \leq$

$$\leq |s| \cdot \sup_{\theta \in [0,s]} \left\| \frac{\partial}{\partial s}\phi(\theta,t) \right\| = \left\{ \frac{\partial}{\partial s}\phi(\theta,t) = (f'(a+th+\theta\tilde{h}) - f'(a+\theta\tilde{h}))\tilde{h} - t f''(a)(h,\tilde{h}) \right\}$$

$$= |s| \sup_{\theta \in [0,s]} \left\| (f'(a+th+\theta\tilde{h}) - f'(a+\theta\tilde{h}))\tilde{h} - t f''(a)(h,\tilde{h}) \right\|$$

$$f'(a+th+\theta\tilde{h}) = f'(a) + f''(a)(th+\theta\tilde{h}) + r(a, th+\theta\tilde{h})$$

$$f'(a+\theta\tilde{h}) = f'(a) + f''(a)(\theta\tilde{h}) + r(a, \theta\tilde{h})$$

z definicji 2-giej pochodnej

A więc

$$(f'(a+th+\theta\tilde{h}) - f'(a+\theta\tilde{h}))\tilde{h} - t f''(a)(h,\tilde{h}) =$$

$$f'(a)\tilde{h} + f''(a)(th+\theta\tilde{h}, \tilde{h}) + r(a, th+\theta\tilde{h})\tilde{h} +$$

$$- f'(a)\tilde{h} - f''(a)(\theta\tilde{h}, \tilde{h}) - r(a, \theta\tilde{h}) \cdot \tilde{h} - t f''(a)(h,\tilde{h})$$

$$= t f''(a)(h,\tilde{h}) - t f''(a)(h,\tilde{h}) + r(a, th+\theta\tilde{h})\tilde{h} - r(a,\theta\tilde{h})\tilde{h}$$

$$= r(a, th+\theta\tilde{h})\tilde{h} - r(a, \theta\tilde{h})\tilde{h}.$$

Dalej weźmy $s = t$. Wtedy $\theta \in [0,t]$ i widać, że

$$\|\phi(t,t)\| \leq |t| \sup_{\theta \in [0,t]} \| r(a, th+\theta\tilde{h}) - r(a,\theta\tilde{h}) \| \, \|\tilde{h}\| =$$

$$|t| \left(\sup_{\theta \in [0,t]} \frac{\| r(a, th+\theta\tilde{h}) \|}{\| th+\theta\tilde{h} \|} \cdot \| th+\theta\tilde{h} \| + \sup_{\theta \in [0,t]} \frac{\| r(a,\theta\tilde{h}) \|}{\| \theta\tilde{h} \|} \| \theta\tilde{h} \| \right) \|\tilde{h}\|$$

(5)

$$\leq t^2 \cdot 2M \cdot \underbrace{\left(\sup_{\theta\in[0,t]} \frac{\|r(a, th+\theta\tilde{h})\|}{\|th+\theta\tilde{h}\|} + \sup_{\theta\in[0,t]} \frac{\|r(a,\theta\tilde{h})\|}{\|\theta\tilde{h}\|} \right)}_{\substack{\downarrow t\to 0 \\ 0}}$$

$\leftarrow$ z definicji reszty.

Czyli wnioskujemy że:

$$\frac{\phi(t,t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

z drugiej strony

$$\frac{\phi(t,t)}{t^2} = \frac{f(a+t(h+\tilde{h})) - f(a+th) - f(a+t\tilde{h}) - f(a)}{t^2} - f''(a)(h,\tilde{h})$$

Czyli $f''(a)(h,\tilde{h}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t(h+\tilde{h})) - f(a+th) - f(a+t\tilde{h}) - f(a)}{t^2}$

i tak jest dla dowolnych $h, \tilde{h}$. W szczególności

$$f''(a)(\tilde{h},h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t(\tilde{h}+h)) - f(a+t\tilde{h}) - f(a+th) - f(a)}{t^2} = f''(a)(h,\tilde{h})$$

■

Pochodne wyższych rzędów

Przypuść, że funkcja $f: \mathbb{R}^k \supset O \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ma pochodną $f''(x)$ dla wszystkich $x\in O$.

Jeśli $f'': O \longrightarrow L(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^e)$ jest różniczkow.

w $a \in O$ to $(f'')'(a)$ oznaczamy $f'''(a)$. (6)

Jaką ma naturę $f'''(a)$?

$f'''(a) \in L(\mathbb{R}^k, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)) \simeq L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$

– odwzorowania 3-liniowe z $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^l$. Przekonajmy się, że $f'''(a)(h, \tilde{h}, \tilde{\tilde{h}})$ jest symetryczne ze względu na przestawianie argumentów $h, \tilde{h}, \tilde{\tilde{h}}$. W tym celu zauważmy, że:

(1) $f''(a+h) - f''(a) \simeq f'''(a)h$

(2) $f''(a+h)(\tilde{h}, \cdot) - f''(a)(\tilde{h}, \cdot) \simeq f'''(a)(h, \tilde{h}, \cdot)$

(3) Stosując rozumowanie z Tw 1 wykazujemy że $f'''(a)(h, \tilde{h}, \cdot) = f'''(\tilde{h}, h, \cdot)$

(4) Podobnie $f''(a+h)(\tilde{h}, \hat{\tilde{h}}) - f''(a)(h, \tilde{h}) \simeq f'''(a)(h, \tilde{h}, \hat{\tilde{h}})$ skoro lewa strona jest symetryczna ze względu na przestawienie $\tilde{h}$ i $\hat{\tilde{h}}$ to także prawa

(1) ... (4) pokazuje że $f'''(a)$ jest formą 3-liniową symetryczną w $h, \tilde{h}, \tilde{\tilde{h}}$.

Ogólniej dla $n \in \mathbb{N}$, pochodna n-ta $f^{(n)}(a)$ odwzorowania $f: \mathbb{R}^k \supset O \to \mathbb{R}^l$ jest formą n-liniową symetryczną: $f^{(n)}(a) \in L(\mathbb{R}^k, \dots, \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$.