WYKŁAD 9

Na dzisiejszym wykładzie opuścimy strefę komfortu przy $\mathbb{R}^k$. Rozważymy abstrakcyjny koncept p-ni metrycznej. Przykłady znacie:

① W zbiorze $\mathbb{R}^k$ mamy odległość pitagorejską $d_2(x,\tilde{x}) = \left[(x_1-\tilde{x}_1)^2 + \dots + (x_k-\tilde{x}_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k \qquad d(x,\tilde{x}) \overset{\text{ozn}}{=} \|x-\tilde{x}\|_2$$

② W zbiorze macierzy $M_{l\times k}(\mathbb{R})$ wprowadziliśmy normę macierzy $A \in M_{l\times k}(\mathbb{R})$ wzorem $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_2 \leq 1} \underbrace{\|Ax\|_2}_{\text{norma pitagorejska}}$ wektora $Ax \in \mathbb{R}^l$. Czyli w $M_{l\times k}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{l\cdot k}$ są różne normy i odpowiadające im odległości.

③ Niech $C([0,1],\mathbb{R})$ będzie zbiorem funkcji ciągłych rzeczywistych na $[0,1]$. Jeśli $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ to normą sup funkcji f nazywamy (skończoną) wielkość $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Odległość f od $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ definiujemy wzorem

$$d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty$$

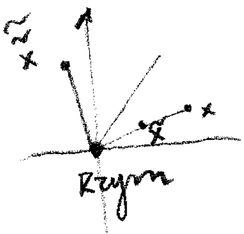
④ Egzotyczne przykłady metryk

ⓐ $X = \mathbb{R}^n$ d - metryka rzymska

Wszystkie drogi prowadzą do Rzymu.

$$d(x,\tilde{x}) = \begin{cases} \|x-\tilde{x}\|_2 - \text{gdy } x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n \text{ leżą na jednej drodze do Rzymu} \\ \|x\|_2 + \|\tilde{x}\|_2 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Rys

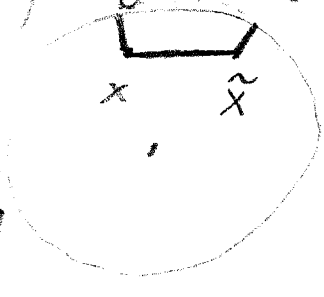


$d(x,\tilde{x}) = \|x-\tilde{x}\|_2$

$d(x,\tilde{\tilde{x}}) = \|x\|_2 + \|\tilde{\tilde{x}}\|_2$

ⓑ $X = K_{\mathbb{R}^2}(0,1) = \{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$

Interpretujemy X następująco: X jest jeziorem w którym z punktu $x\in X$ do $\tilde{x}\in X$ możemy albo przepłynąć po prostej albo dopływamy do brzegu biegniemy z "nieskończoną" prędkością po brzegu, wskakujemy do wody na wysokości $\hat{x}$ dopływając do $\hat{\tilde{x}}$ po prostej. Rys



$$d_X(x,\tilde{x}) = \min\{\|x-\tilde{x}\|_2,\ 1-\|x\|_2+1-\|\tilde{x}\|_2\}$$

Udowodnimy teraz bardzo ogólne i bardzo ważne twierdzenie dotyczące odwzorowań zwężających p-ni metrycznej zupełnej (X,d). Przykłady zastosowań pojawią się w dalszej części wykładu: twierdzenie o funkcji uwikłanej, twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.

Definicja Niech (X,d) będzie p-nią metryczną oraz $T: X \to X$. Mówimy, że T jest odwzorowaniem zwężającym gdy istnieje stała $\lambda \in [0,1[$ t. że $d(T(x), T(\tilde{x})) \leq \lambda d(x,\tilde{x})$ dla wszystkich $x, \tilde{x} \in X$. odległość obrazów $x, \tilde{x}$ jest ściśle (jednostajnie) mniejsza niż odległość $x, \tilde{x} \in X$.
Mówimy, że x jest punktem stałym T jeśli $T(x) = x$.

Szereg problemów matematycznych można sformułować w terminie pytania o istnienie i jednoznaczność punktu stałego pewnego odwzorowania. Przypomnijcie sobie np przykład ciągi rekurencyjne.

Dlatego poniższe twierdzenie często daje (5)
ważne wnioski lub jest używane w
dowodzie ważnych faktów

Twierdzenie (Banacha o punkcie stałym)
Jeśli (X,d) jest p-nią metryczną zupełną
zaś $T: X \to X$ jest odwzorowaniem zwę-
żającym, to T ma dokładnie jeden punkt
stały $x \in X$.

<u>Dowód</u> Odwzorowanie zwężające może
mieć tylko jeden punkt stały. Rzeczywiście,
jeśli $T(x) = x$ & $T(\hat{x}) = \hat{x}$ to
$d(x,\hat{x}) = d(T(x),T(\hat{x})) \leq \lambda d(x,\hat{x})$ zatem
$(\lambda < 1)$ mamy $d(x,\hat{x}) = 0$ & $x = \hat{x}$.
Pozostaje wykazać istnienie punktu stałego.
Niech $x_0 \in X$ będzie dowolnym punktem.
Rozważmy rekurencję $x_{n+1} = T(x_n)$.
Skoro T jest zwężające to
$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$
$\leq \lambda^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$
Ogólniej dla $n > m$ mamy
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m)$
$\leq \lambda^{n-1} d(x_1,x_0) + \lambda^{n-2} d(x_1, x_0) + \dots + \lambda^m d(x_1, x_0) \leq$

$$\leq d(x_1,x_0) \sum_{j=m}^{\infty} \lambda^j = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1,x_0).$$

Zatem dla $\varepsilon>0$ $\exists N$: $\lambda^N < \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{d(x_1,x_0)}$

oraz $n>m>N$ mamy

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1,x_0) \leq \frac{\lambda^N}{(1-\lambda)} d(x_1,x_0) < \varepsilon.$$

czyli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego

Skoro (X,d) jest p-nią zupełną to ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny: niech $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$. Zauważmy, że odwzorowanie zbliżające jest ciągłe. Rzeczywiście jeśli ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zbiega do y to

czyli

$$d(T(y),T(y_n)) \leq \lambda d(y_n,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

W szczególności $T(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(y)$.

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = x$$

czyli $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ jest punktem stałym odwzorowania T, to kończy dowód.

Zakończymy wykład lematem z którego będziemy korzystać w dalszej części wykładu

<u>Lemat</u> Niech $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^k$ będą zbiorami otwartymi a $f: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ będzie bijekcją różniczkowalną w p-cie $a \in \mathcal{O}_1$. <u>verte</u> →

Załóżmy, że macierz $f'(a) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ jest odwracalna. Jeśli $f^{-1}: O_2 \to O_1$ jest ciągła w punkcie $b = f(a)$ to f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie b oraz ⑦

$$(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}.$$

<u>Dowód</u>: Niech $\tilde{h}$ będzie "przyrostem dążącym do zera" Rozważmy

$$f^{-1}(b+\tilde{h}) - f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)+\tilde{h}) - f^{-1}(f(a)) =$$

$(*) = f^{-1}(f(a)+\tilde{h}) - a$. Jeśli $\tilde{h}$ jest małe to $f(a)+\tilde{h} \in O_2$ i istnieje h t. że

$f(a+h) = f(a)+\tilde{h}$. Zauważmy, że

$a+h = f^{-1}(f(a)+\tilde{h})$ i z ciągłości f^{-1} w punkcie $f(a)$ wnioskujemy, że gdy $\tilde{h} \to 0$ to $h = f^{-1}(f(a)+\tilde{h}) - a \to 0$

(**) $= f^{-1}(f(a+h)) - a = a+h-a = h = A^{-1}Ah$.

gdzie $A = f'(a) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ jest macierzą odwracalną. Zauważmy, że $\tilde{h} = f(a+h) - f(a) = Ah + r(h)$ zatem (**) $= A^{-1}(\tilde{h} - r(h)) = A^{-1}\tilde{h} + A^{-1}r(h)$

czy $\dfrac{\|A^{-1}r(h)\|}{\|\tilde{h}\|} \xrightarrow[\|\tilde{h}\| \to 0.]{} 0$?? Zauważmy, że: verte →

(8)

$$\frac{\|A^{-1} r(h)\|}{\|\hat{h}\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|r(h)\|}{\|f(a+h) - f(a)\|} =$$

$$\|A^{-1}\| \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|f(a+h) - f(a)\|}$$

Skoro dla $\hat{h} \to 0$ mamy $h \to 0$ to wystarczy wykazać, że

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[\|\hat{h}\| \to 0]{} 0$$

$$\inf_{h \neq 0} \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} > 0$$

gdzie $\|h\|$ - dostatecznie małe.

Zauważmy w tym celu, że

$$\frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} = \frac{\|Ah + r(h)\|}{\|h\|} \geqslant \frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|r(h)\|}{\|h\|}.$$

Skoro $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[\|\hat{h}\| \to 0]{} 0$ to wystarczy pokazać

że $\inf_{h \neq 0} \frac{\|Ah\|}{\|h\|} > 0$. Zauważmy, że

$$\inf_{h \neq 0} \frac{\|Ah\|}{\|h\|} = \inf_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Ax_0\|$$ dla pewnego $\|x_0\| = 1$

gdyż funkcje ciągłe na zb. zw. przyjmują inf

Skoro A - odwracalne to $Ax_0 \neq 0$ i $\|Ax_0\| > 0$