13.03.2009

Seria 3 Zadań z Analizy II

Zadanie 1. Przekształcenie $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane jest wzorem

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \left((x+y+1)e^x - 1, 2\frac{\cos x - 1}{x}\right) & x \neq 0 \\ (y,0), & x = 0 \end{cases}$$

a) sprawdź, że ϕ jest funkcją ciągłą,

b) oraz różniczkowalną,

c) oblicz $\left(\overbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}^{10}\right)'$ dla $(x,y) = (0,0)$.

Zadanie 2. Znajdź F' w punkcie (s,t,u) jeśli $F = f \circ g \circ h$ gdzie

$$f\colon (x,y) \to \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{pmatrix}, \quad g\colon (r,\phi) \to \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}, \quad h\colon (s,t,u) \to \begin{pmatrix} stu \\ s^2+t^2+u^2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Określ czy funkcje są różniczkowalne i znajdź pochodne cząstkowe (tam gdzie istnieją)

a) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$,

b) $f(x,y) = \frac{x+y^2}{x^2+y^2+1}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-x+1}$,

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

e) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 4. Przedstaw wyrażenie

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

w zmiennych

$$\xi = x, \;\; \eta = x - y, \;\; \rho = x - z.$$

Zadanie 5. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jest następująco

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\left[\ln(x^4+y^2) - \ln y^2\right], & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

Sprawdzić, że

a) funkcja f jest ciąglą,

b) dla każdego $\alpha \in [0, 2\pi]$ istnieje pochodna kierunkowa f w punkcie $(0,0)$ w kierunku $(\sin\alpha, \cos\alpha)$

c) funkcja f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Zadanie 6. Niech u będzie funkcją $\mathcal{C}^2$ na obszarze $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, zaś funkcje $u_s(r,\theta,\phi)$ oraz $u_c(\rho,\phi,z)$ jej przedstawieniami we współrzędnych sferycznych $(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$ oraz cylindrycznych $(x,y,z) = (\rho\sin\phi, \rho\cos\phi, z)$. Wyprowadź wzory

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u_c}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_c}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_c}{\partial z}\right)^2, \quad |\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_s}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial u_s}{\partial \phi}\right)^2$$

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u_c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_c}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_c}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2}, \qquad \triangle u = \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_c}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_c}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u_c}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_c}{\partial \phi^2}$$

Zadanie 7. Wyrazić

a) równanie $(1+x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ w zmiennych $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ oraz $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$,

b) oraz równanie $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ w zmiennych $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

W obu przykładach $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.

Zadanie 8. Dla jakich wartości rzeczywistych $\lambda_1 \neq \lambda_2$ równanie

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \ AC < B^2$$

jest równoważne

$$\frac{\partial f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

dla $\xi = x + \lambda_1 y$ i $\eta = x + \lambda_2 y$.