Seria 1 zadań z Analizy II, luty 2009

1. Oblicz promień zbieżności szeregów potęgowych:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$;

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$;

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$;

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n x^n$;

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{(-1)^n n^2} x^n$.

2. Udowodnij, że dla $q \in \mathbb{R}$ takich, że $|q| < 1$ mamy

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots .$$

   Wyprowadź stąd wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

3. Oblicz sumę szeregu

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$;

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

4. Rozwiń funkcję $\log(4 + 3x - x^2)$ w szereg Tailora w otoczeniu punktu $x_0 = 2$.

5. Oblicz granice korzystając z szeregu Tailora

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1+x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\log(1+x)-x}$;

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$;

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin^2 x)}$.