V seria zadań z Analizy II, kwiecień 2009

1. Niech S będzie zbiorem zadanym jednym z poniższych wzorów. Znaleźć zbiór U tych punktów $p \in S$, dla których istnieje pewne otoczenie $V_p \ni p, V_p \subset \mathbb{R}^3$, takie, że $S \cap V_p$ jest powierzchnią.

   (a) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x^2 + y^2 + z^2 = b^2\}$, gdzie $0 < a < b < c$;

   (b) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x^2 + y^2 = b^2\}$, gdzie $0 < a < b < c$;

   (c) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2, x + y = \sqrt{2}(a - b)\}$, gdzie $a > b$;

   (d) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - (y^2 + z^2 - 1)^2 = 0\}$.

2. Zbadać ekstrema warunkowe funkcji u:

   (a) $u = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

   (b) $u = x^2 + y^2 + z^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$;

   (c) $u = xy^2z^3, x + 2y + 3z = a \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$;

   (d) $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \quad (a > b > c > 0, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$;

   (e) $u = \sum_{i,j}^n a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji}), \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

3. Wykazać nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i \leqslant (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^n x_i^q)^{1/q} \ (a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0, i = 1, \dots, n, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

   Wskazówka: Szukać ekstremum funkcji $u(x) = (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^n x_i^q)^{1/q}$ przy warunku $\sum_{i=1}^n a_ix_i = A$.