Kolokwium nr 2 - Analiza II 2008/2009L

11 Maja 2009, godz. 9:00, P17

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących kolokwium!

Zadanie 1. Zapisać operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

w zmiennych (α, β)

$$x = c\alpha\beta \qquad y = \frac{c}{2}(\alpha^2 - \beta^2),$$

gdzie $c \in \mathbb{R}_+$ jest dowolną dodatnią stałą.

Zadanie 2. Określmy funkcję

$$f : \mathbb{R}^3_+ = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x > 0, \, y > 0, \, z > 0\big\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

wzorem

$$f(x, y, z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z)\left(1 + \frac{1}{xyz}\right)$$

Znaleźć i zbadać wszystkie punkty krytyczne funkcji f na jej dziedzinie.

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y, z) = ax + by + z.$$

Zbadać esktrema $f(x, y, z)$ na torusie zadanym równaniem

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2.$$

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y, z) = 2x^6 z^7 + y^2 z^3 + 3x^4 + y^2 + z.$$

Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ przeciwobraz $f^{-1}(\{a\})$ jest powierzchnią. Rozstrzygnąć w jakich punktach powierzchni $f^{-1}(\{0\})$ funkcja uwikłana $z(x, y)$ jest dobrze określona lokalnie. Znaleźć i zbadać lokalne ekstrema funkcji $z(x, y)$.