Seria domowa nr 2 z przestrzeni metrycznych.

28 Lutego 2009

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com

1 Dowody z dziedziny ciągłości i zbieżności

Zadanie 1.1 *Niech $(\mathcal{X}, d)$ oraz $(\mathcal{Y}, d')$ będa zupełnymi przestrzeniami metrycznymi. Wykazać równoważność defincji ciągłości Heinego oraz Cauchy'ego dla funkncji $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.*
Uwaga:
Cauchy ciągłość w x_0:

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in\mathcal{X}}\; d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

Heine ciągłość w x_0:
Funkcja f jest ciągła w x_o wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$ w $\mathcal{X}$ mamy $f(x_n) \to f(x_0)$ w $\mathcal{Y}$.

Zadanie 1.2 *Niech $(\mathcal{X}, d)$ oraz $(\mathcal{Y}, d')$ będa przestrzeniami metrycznymi. Wykazać, że funkcja $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ jest ciągła wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego $\mathcal{O} \subset \mathcal{Y}$, jego przeciwobraz $f^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w $\mathcal{X}$.*

Zadanie 1.3 *Niech $(\mathcal{X}, d)$ oraz $(\mathcal{Y}, d')$ będa przestrzeniami metrycznymi. Wykazać, że funkcja $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ jest ciągła wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru domkniętego $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$, jego przeciwobraz $f^{-1}(\mathcal{D})$ jest domknięty w $\mathcal{X}$.*

Zadanie 1.4 *Niech $(\mathcal{X}, d)$ będzie przestrzenią metryczną. Ponadto niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{X}$. Udowodnić, że istnieje ograniczony zbiór $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zawierający wszystkie wyrazy ciągu (x_n). Wykazać, w przypadku gdy $\mathcal{X}$ jest zupełna, iż zbiór o którym mowa można wybrać tak by był zwarty.*

Zadanie 1.5 *Niech $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ze standardową topologią, $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ jest zwarty wtedy, i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony w $\mathcal{X}$. Czy twierdzenie to jest słuszne dla dowolnej zupełnej przestrzeni metrycznej? Odpowiedź uzasadnić.*

Zadanie 1.6 *Niech $(\mathcal{X}, d)$ będzie zupełną przestrzenią metryczną. Wykazać równoważność warunków:*

(1) *Zbiór $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ jest dokmnięty wtedy, i tylko wtedy, gdy zawiera granice ciągów Cauchy'ego w nim zawartych (od pewnego miejsca).*

(2) *Zbiór $\mathcal{A} \in \mathcal{X}$ jest dokmnięty wtedy, i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $\mathcal{A}^C$ jest otwarte.*

Jak wygląda sytuacja w przestrzeni, która nie jest zupełna?

2 Ćwiczenia z otwartości, domkniętości, zwartości i spójności

Zadanie 2.1 *Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru* $\mathbb{N}$ *w topologii zadanej metryką* $d(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. *Czy metryka* $d_{\Diamond}(m,n) := |m-n|$ *określa tę samą co* $d(\cdot,\cdot)$ *topologię w zbiorze* $\mathbb{N}$*?*

Zadanie 2.2 *Dowieść, że:*

(1) *jeśli podzbiory* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *są zwarte, to zbiór* $\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{a+b \ : \ a \in \mathcal{A}, \ b \in \mathcal{B}\}$ *też jest zwarty*

(2) *jeśli* $\mathcal{A}$ *jest zwarty, a* $\mathcal{B}$ *domknięty, to* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ *jest domknięty.*

Podać przykład domkniętych podzbiorów $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^2$*, dla których zbiór* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ *nie jest domknięty.*

Zadanie 2.3 *Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność zbioru*

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R} \ : \ 6x^{10} - 5x^8 - 4x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1 \leq 0\}.$$

Jak wygląda ta sprawa dla dowolnego wielomianu? Parzystego stopnia? Nieparzystego stopnia? Co zmienia się, gdy zamienimy nierówność na ostrą?

3 Ćwiczenia z metrykami

Zadanie 3.1 *Niech* $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. *Strukturę przestrzeni metrycznej w* $\mathcal{X}$ *można zadać przy pomocy jednej z norm* ℓ_p*, gdzie* $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Mamy*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} & p \in \mathbb{N} \\ \sup_{x_i} |x_i| & p = \infty \end{cases} .$$

Pokazać, że metryki te są równoważne. Jaki związek między kulami jest potrzebny by metryki były równoważne? Opisać kule oraz odcinek domknięty w każdej z metryk. Jakie ułatwienie niesie ze sobą fakt, że metryka zadana jest przez normę?

Zadanie 3.2 *Czy wzór*

$$d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$$

określa metrykę na $\mathbb{R}$*?*

Zadanie 3.3 *Jak wyglądają funkcje ciągłe:*

(1) *z dowolnej przestrzeni metrycznej do przestrzeni z metryką dyskretną,*

(2) *z przestrzeni z metryką dyskretną do dowolnej przestrzeni metrycznej.*

Co da się powiedzieć o takiej sytuacji?

Zadanie 3.4 *Niech $\mathcal{Z}$ będzie dowolnym, niepustym zbiorem. Zdefiniujmy zbiór $\mathcal{P}$ skończonych podzbiórów $\mathcal{Z}$*

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{A} \in 2^{\mathcal{Z}} \ : \ \mathcal{A} \ \text{skończony}\}.$$

Wykazać, że wzór

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := |\mathcal{A} \div \mathcal{B}|$$

określa metrykę w zbiorze $\mathcal{P}$. Opisać kule i odcinki w $\mathcal{P}$ względem tej metryki.
Uwaga: *Wzór $\mathcal{A} \div \mathcal{B}$ oznacza różnicę symetryczną – sumę teoriomnogościową zbiorów z wyjętą ich częścią wspólną.*

Zadanie 3.5 *Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem*

$$f(x_1, x_2) := \left(\frac{x_1 - x_2}{\alpha}, \frac{x_1 + x_2}{\alpha} \right).$$

Sprawdzić, przy jakim α

$$f : (\mathbb{R}^2, d_{\Box}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\Diamond})$$

jest izometrią (zachowuje odległości). Jak zobrazować f geometrycznie (dla znalezionego α)?
Wskazówka: *Metryki pochodzą od normy. Zainteresować się przekształceniem f obciętym do kuli jednostkowej o środku w $(0, 0)$.*