Egzamin zerowy z Analizy II

1 czerwca 2009

Zadanie 1. W obszarze $\{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$ wprowadzamy nowe zmienne wzorami

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{x}{y}$$

Zapisać w zmiennych (u,v) równanie

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$$

i ewentualnie rozwiązać je.

Zadanie 2. Płaszczyzna ℓ zawierająca punkt $P = (1,1,2)$ przecina osie OX, OY, OZ w punktach odpowiednio $A = (x_0, 0, 0)$, $B = (0, y_0, 0)$, $B = (0, 0, z_0)$. Znaleźć współrzędne x_0, y_0, z_0 takie, że objętość czworościanu $ABCO$ jest najmniejsza. Uwaga: nie wymagamy dowodu globalności otrzymanego minimum.

Zadanie 3. Znaleźć objętość bryły

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2, x^2+y^2 \ge a|x|\}, a > 0.$$

Zadanie 4. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{dla} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$