

Kolokwium dodatkowe B - Analiza III 2009/2010L

18 Stycznia 2010, godz. 9:00, SST

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących kolokwium!

Zadanie 1. Znaleźć pracę siły $\mathcal{F}$, zadanej na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$\mathcal{F} = z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z},$$

wzdłuż krzywej $\mathcal{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$ zorientowanej przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, jeśli patrzeć z początku układu współrzędnych.

Wskazówka: Metryka jest euklidesowa.

Zadanie 2. Obliczyć objętość indukowaną z $\mathbb{R}^3$ podrozumności

$$\mathcal{K}_a = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} = z \right\} \cap \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq ax \right\},$$

dla dowolnego parametru $a \in \mathbb{R}_+$. Znaleźć środek ciężkości $\mathcal{K}_a$ przy założeniu jednorodnego rozkładu masy.

Wskazówka: Współrzędne sferyczne nadają się całkiem nieźle. Dla środka ciężkości, należy obliczyć średnią odległość $\mathcal{K}$ od początku układu współrzędnych lub zauważyć, że dwie z trzech współrzędnych środka ciężkości są identyczne, a trzecia trywialna.

Zadanie 3. Na $\mathbb{R}^2$ znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne będące postaci $u(x^2 - y^2)$.

Przypomnienie: Harmoniczne funkcje to te, które spełniają równanie Laplace'a.

Zadanie 4. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ obliczyć całkę

$$\mathcal{I}_{a,b} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + ib \cos \varphi}.$$

Wskazówka: Wykorzystać walory funkcji zmiennej zespolonej na okręgu jednostkowym.