Seria nr 1 - Analiza III 2009/2010Z

26 Października 2009

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com!

Całki z parametrem

Zadanie 1. Oznaczmy $K := \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ Niech, dla $p > -1$,

$$I_p := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \varphi \, \mathrm{d}\varphi.$$

Licząc całkę $\int_K \frac{y^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ dwoma sposobami: jako całkę iterowaną lub przez parametryzację

$$x = \sin\vartheta \, \cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta \, \sin\varphi,$$

wykazać tożsamość $I_p I_{p+1} = \frac{\pi}{2(p+1)}$. Korzystając z tej tożsamości wyprowadzić następujące oszacowanie

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} < I_p < \sqrt{\frac{\pi}{2p}}.$$

Zadanie 2. Znaleźć jawną postać funkcji

$$F(a) = \int_0^{2\pi} \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x} \, \mathrm{d}x,$$

dla $|a| < 1$.

Zadanie 3. Policzyć całkę $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x} \sin ax}{x} \, \mathrm{d}x$ i uzasadnić postępowanie.

Zadanie 4. Obliczyć, korzystając z twierdzeń o całkach z parametrem:

a) $F(a) := \int_0^\infty \exp\left(-x^2 - a^2 x^{-2}\right) \, \mathrm{d}x$ dla $a \in \mathbb{R}$,

b) $\Phi(a,b) := \int_0^\infty \exp\left(-a^2 x^2 - b^2 x^{-2}\right) \, \mathrm{d}x$ dla $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$,

c) $F(a) := \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{1-\cos ax}{x}\right) \, \mathrm{d}x$ dla $a \in \mathbb{R}$,

d) $F(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(a^2 - \sin^2 x\right) \, \mathrm{d}x$ dla $a > 1$,

e) $F(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(1 - a^2 \sin^2 x\right) \, \mathrm{d}x$ dla $-1 \leq a \leq 1$,

f) $F(a) := \int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzeń o całkach z parametrem obliczyć dla $a \geq 0$ całkę

$$F(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(a^2 + \sin^2 x\right)\, \mathrm{d}x.$$

Wskazówka: Zbadać $F(a)$ dla $a \to \infty$.

Zadanie 6. Wyprowadzając równanie różniczkowe drugiego rzędu na $F(\alpha)$, i sprawdzając równość całek dla pewnej wartości parametru α wykazać tożsamość

$$F(\alpha) := \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin(x-\alpha)}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 7. Wprowadzając parametr obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})\cos x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 8. Dla $a > 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ znaleźć jawny wzór na rodzinę całek

$$F_n(a) := \int_0^1 x^{a-1} \log^n x\, \mathrm{d}x.$$

Wskazówka: Różniczkując po parametrze znaleźć rekurencję na $F_n(a)$.

Udanej zabawy!