

Egzamin poprawkowy, pisemny - Analiza III 2009/2010L

8 Marca 2010, godz. 9:00, P17

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących egzamin!

Zadanie 1. Znaleźć taką funkcję holomorficzną $\Phi(x, y)$, by

$$|\Phi(x, y)| = (x^2 + y^2)e^x.$$

Zadanie 2. Znaleźć strumień pola wektorowego określonego na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$F(x, y, z) = x^3 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$$

przez $\partial\Omega$, jeśli $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 - 2z \leq 0, z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. $\partial\Omega$ jest zorientowana „na zewnątrz” względem Ω przy założeniu kanonicznej orientacji $\mathbb{R}^3$.

Wskazówka: Strumień ten jest postaci $\pi(a + b\sqrt{2})$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

Zadanie 3. Obliczyć całkę

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + 4)} dx.$$

Wskazówka: Dobrać odpowiedni kontur.

Zadanie 4. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

$$f(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{iqr},$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Wskazówka: Całkować w układzie sferycznym wybierając $\vec{p}$ równoległe do osi z . Problem wymaga regularyzacji – należy obliczyć transformatę funkcji $f_\epsilon(r) = f(r)e^{-\epsilon r}$ i przejść do granicy $\epsilon \rightarrow 0$. Konwencja

$$\hat{f}(\vec{p}) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\vec{p} \cdot \vec{x})} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Zadanie 5. Wykazać, że

$$\frac{d^2}{dx^2} T_{\sin|x|} = T_g + \alpha \delta_0.$$

Znaleźć jawnie g oraz α wiedząc, że $\alpha \in \mathbb{C}$, natomiast T_g jest dystrybucją regularną zadaną przez funkcję g .

Wskazówka: Proste rozwiązania są często najlepszymi.