

Egzamin pisemny - Analiza III 2009/2010L

1 Lutego 2010, godz. 9:00, Nowa Aula

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących egzamin!

Zadanie 1. Sprawdzić, że dwuforma $\omega := (y - z) dx \wedge dy - (x + z) dx \wedge dz + (x + y) dy \wedge dz$ posiada formę pierwotną i wykorzystać ten fakt do policzenia strumienia pola wektorowego:

$$\mathcal{D} = (x + y) \frac{\partial}{\partial x} + (x + z) \frac{\partial}{\partial y} + (y - z) \frac{\partial}{\partial z}$$

przez powierzchnię $\mathcal{S} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = e^z \cos z, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$ z orientacją zewnętrzną zadaną przez wektor normalny $\frac{\partial}{\partial z}$ zaczepiony w punkcie $(0, 0, \frac{\pi}{2})$.

Zadanie 2. Niech

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x^2 + y^2 - 1)^3 = \frac{9}{4}z^2, |z| \leq \frac{1}{3} \right\}$$

będzie dwuwymiarową podrozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym. Obliczyć objętość $\mathcal{K}$ względem metryki indukowanej.

Zadanie 3. Obliczyć całkę

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^5 + 1}$$

Wskazówka: Skorzystać z własności logarytmu i całkować po gębie, czy też “packmanie”, które z punktu widzenia analizy zespolonej są tym samym co dziurka od klucza.

Zadanie 4. Niech

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}.$$

Znaleźć transformatę Fouriera $\hat{f}(\xi)$, gdzie

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx.$$

Wskazówka: Jedną z dróg może być korzystanie z funkcji zespolonych w celu liczenia całek.

Zadanie 5. Propagatory w kwantowej teorii pola często liczone są metodami wykorzystującymi teorię dystrybucji oraz teorię całek konturowych dla funkcji zespolonych. Jedną z przydatnych tożsamości dla dystrybucji jest *wzór Sochockiego*. Wykazać, że

$$\frac{1}{x \mp i0} := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \pm i\pi\delta_0 + \mathcal{P}_{(\frac{1}{x})}. \quad (1)$$

W tym celu uzasadnić, że w sensie dystrybucji

$$\mathcal{T}_1 := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \log \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} = \log |x| \quad \text{oraz} \quad \mathcal{T}_2 := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \arctg \frac{x}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x).$$

Następnie zauważyć, że

$$\frac{1}{x \mp i0} = \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{T}_1 \pm i\mathcal{T}_2]$$

i korzystając z tego spostrzeżenia uzasadnić (1)

Wskazówka: Ukrywa się tu wiele całek z parametrem. Przy dowodzeniu zbieżności jednostajnej takich całek wygodnie posłużyć się twierdzeniem o zbieżności majoryzowanej.