Seria nr 2 - Analiza III 2009/2010Z

22 Października 2009

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com!

Zadania ogólne

Zadanie 1. Określmy liniowe operatory symetryzacji

$$\Theta_s : \mathcal{V}^{\sharp n\otimes} \longrightarrow \odot^n \mathcal{V}^\sharp$$

oraz antysymetryzacji

$$\Theta_a : \mathcal{V}^{\sharp n\otimes} \longrightarrow \Lambda^n \mathcal{V}^\sharp$$

wzorami

$$\Theta_s\left(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \xi_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \xi_{\sigma(n)},$$

$$\Theta_a\left(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|}\, \xi_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \xi_{\sigma(n)}.$$

Uwaga 0.1 *Operator liniowy wystarczy określić dla tensorów prostych. W oczywisty sposób operator jest suriektywny i otrzymujemy wszystkie zupełnie symetryczne/antysymetryczne n-formy.*

Wykazać dla zdefiniowanych powyżej operacji, że

$$\Theta_{s/a}^2 = (n!) \cdot \Theta_{s/a}.$$

Wskazówka: Skorzystać z faktu, iż $\mathcal{S}_n$ jest grupą i w związku z tym każda permutacja posiada permutację odwrotną.

Zadanie 2. Niech $\alpha \in \Lambda^k \mathcal{V}^\sharp$ oraz $\beta \in \Lambda^l \mathcal{V}^\sharp$, wykazać, że

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Zadanie 3. Korzystając z poprzedniego wykazać, że dla $\omega \in \Lambda^{2k+1}\mathcal{V}^\sharp$ zachodzi

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

Podać przykład, który przeczy tej tezie w przypadku, gdy ω jest $2k-$formą, a następnie wykazać, że dla 2-formy α, warunek $\alpha \wedge \alpha = 0$ jest równoważny temu, że α jest formą prostą.

Zadanie 4. Niech formy $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{V}^\sharp$ będą liniowo niezależne oraz niech $\omega \in \Lambda^k \mathcal{V}^\sharp$ i $k \geq 1$. Wykazać, że $\omega = \theta_1 \wedge \omega_1 + \theta_2 \wedge \omega_2$ dla pewnych $(k-1)-$form ω_1 i ω_2, wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \omega = 0$.

Zadania rachunkowe, lemat Poincare oraz twierdzenie Stokesa

Zadanie 5. Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością wymiaru n. W wybranym układzie współrzędnych (x^i) określamy n-formę wzorem

$$\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Znaleźć postać formy ω cofniętej do innego układu współrzędnych (y^i).

Zadanie 6. Zapisać poniższe formy w układzie cylindrycznym (ρ, ϕ, z) oraz w układzie sferycznym (r, ϑ, φ).

(1) $\omega_1 = x\,dy - y\,dx$,

(2) $\omega_2 = \frac{1}{r^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$.

Zadanie 7. Niech $\Phi : \mathbb{R}^4_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3_+$, tak, że $\Phi(p, q, r, s) = (pq, qr, rs)$. Dla

$$\Lambda^2 \mathcal{V}^\sharp \ni \omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

obliczyć $(\Phi^* \omega)$.

Zadanie 8. Na $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ określmy $(n-1)$-formę wzorem

$$\omega := \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} x_r dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_r} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Wykazać tożsamość

$$\omega = x_1^n\, d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_1}\right).$$

Ponadto udowdnić fakt, że $d(f \cdot \omega) = 0$ wtedy, i tylko wtedy, gdy f jest funkcją jednorodną stopnia $-n$.

Zadanie 9. Sprawdzić zamkniętość poniższych form ω_i oraz znaleźć odpowiednie formy pierwotne θ_i tak by zachodziło $\omega_i = d\theta_i$.

(1) $\omega_1 = \frac{y\,dx - x\,dy}{2x^2 - xy + y^2}$

(2) $\omega_2 = \frac{1}{r^{3/2}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$

Zadanie 9. Niech $\omega := (yz\,dx + x\,dy) \wedge dz$, niech $\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (1-z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Obliczyć całkę po brzegu stożka $\mathcal{S}$ zorientowanego standardowo do zewnątrz na dwa sposoby — bezpośrednio przez parametryzację powierzchni oraz korzystając z tw. Stokesa.

Równania Maxwella i gwiazdka Hodge'a

Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością wymiaru n. Można określić liniowy operator

$$\star : \Lambda^k T^*\mathcal{M} \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^*\mathcal{M},$$

tak by dla dowolnych pól wektorowych $X_{k+1}, \ldots, X_n$ zachodziło

$$(\star\beta)(X_{k+1}, \ldots, X_n) = \beta \wedge \eta(X_{k+1}) \wedge \ldots \wedge \eta(X_n).$$

W powyższym wzorze $\eta \in \odot^2 T^*\mathcal{M}$ jest polem symetrycznych dwuform zadających metrykę w przestrzeni stycznej do $\mathcal{M}$.

Uwaga 0.2 *Metrykę $\eta \in \odot^2 T^*\mathcal{M}$ możemy traktować również jako odwzorowanie*

$$\eta : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_p^*\mathcal{M},$$

ponadto zachodzi oczywisty izomorfizm $T_p^*\mathcal{M} = \Lambda^1 T_p^*\mathcal{M} = \odot^1 T_p^*\mathcal{M}$.

Zadanie 10. Znaleźć jawnie, dla wybranej bazy, działanie operatora $\star$ dla $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$

(1) z metryką euklidesową

(2) z metryką Minkowskiego o sygnaturze (1,3), tzn. znak minus występuje przy współrzędnej czasowej.

Ponadto policzyć $\star^2$ w obu tych przypadkach. Dodatkowo znaleźć ogólny wzór opisujący kwadrat operatora Hodge'a w dowolnej sygnaturze (p,q).

Zadanie 12. W obu przypadkach z poprzedniego zadania pokazać, że dla dowolnej funkcji $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi odpowiednio

(1) $(\star d \star d) f = \triangle f$,

(2) $(\star d \star d) f = -\Box f = -\partial_\mu \partial^\mu f$.

Zastanowić się nad przypadkiem ogólnej metryki.

Zadanie 13. Wprowadźmy w $\mathbb{R}^4$ z metryką Minkowskiego formę

$$F = -E_i dt \wedge dx^i + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Traktując E_i oraz B_i jako pole elektromagnetyczne w próżni pokazać, że równania

$$dF = 0 \quad \text{oraz} \quad d \star F = 0$$

są równoważne równianiom Maxwella.