Kolokwium I, 28 marca 2011 - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących. Zadania umieścić na osobnych, podpisanych kartkach. Na rozwiązaniach umieścić nazwisko prowadzącego grupę.

Zadanie 1.

a) Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^7 \ln n}$.

b) Obliczyć promień zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^{2n+1}$.

Zadanie 2. Niech $L : \mathbb{R}_1[\cdot] \to \mathbb{R}_3[\cdot]$ będzie liniowym odwzorowaniem, dla którego $L(w_1) = r_1$, $L(w_2) = r_2$, gdzie $w_1(t) = 2t + 3$, $w_2(t) = 4t - 5$, $r_1(t) = 4t^2 - t - 2$ oraz $r_2(t) = 2t^3 + t$. Znaleźć obraz wektora $w_3(t) = t + 7$ pod działaniem L. Znaleźć macierz odwzorowania L, gdy w $\mathbb{R}_1[\cdot]$ wybierzemy bazę $\{1, t\}$, a w $\mathbb{R}_3[\cdot]$ bazę $\{1 - t, 1 + t, t^2, t^3\}$.

Zadanie 3. Odwzorowanie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie e dane jest macierzą

$$[T]^e{}_e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zapisać operator T w bazie

$$[f_1]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [f_2]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad [f_3]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $(T - \mathbb{1})^2$.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ będzie dana jako

$$A = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{bmatrix},$$

dla $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Obliczyć A^{-1}.

Zadanie 5. Forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest macierzą

$$[Q]_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zapisać tę formę we współrzędnych, a następnie znaleźć bazę diagonalizującą Q.