Tydzień nr 1 (14 - 18 lutego) - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Warunek konieczny zbieżności szeregu, ciąg sum częściowych.

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregów. Oblicz ich sumę, jeśli ma to sens.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{7n+7n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

Szeregi geometryczne.

Zadanie 2. Oblicz sumy szeregów, jeśli ma to sens.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{4n}}{4^{3n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n}}{7^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi^n+e^n}{4^n}$

Zadanie 3. Na dwie cienkie płytki o wpsółczynniku odbicia równym α, ustawione jedna za drugą w niewielkiej odległości, pada prostopadle wiązka światła. Znajdź całkowity współczynnik transmisji $\mathcal{T}$ i odbicia $\mathcal{R}$ jako sumy pewnych szeregów geometrycznych. Sprawdź, czy $\mathcal{T}+\mathcal{R}=1$.

Zadanie 4. Wykonując próby Bernoulliego wiemy, że prawdopobieństwo wylosowania konkretnego ciągu zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń. Janek bierze udział w loterii, w której prawdodobieństwo odniesienia suckcesu wynosi $\frac{1}{p}$. Robi to wielokrotnie, i chciałby odnieść suckces w n-tej próbie. Wartość oczekiwana $E[n]$ liczby prób potrzebych do odniesienia sukcesu dana jest poprzez sumę

$$E[n] = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k-1} \frac{1}{p}.$$

Wykazać, że $E[n] = p$.

Wskazówka: Zauważyć, że $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

Ciekawostka: Janek wziął udział w loterii p razy. Prawdopobieństwo, że przynajmniej raz udało mu się wygrać, wynosi "jeden minus prawdopobieństwo, że ani razu mu się nie udało". Zapiszemy to jako

$$P(p) = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p}.$$

Jaka jest granica $\lim_{p \to \infty} P(p)$?

Zadanie 5. Przyjrzyjmy się liczbom: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... Zauważymy od razu, że jest to ciąg spełniający rekurencję $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ z warunkiem początkowym $a_0 = 0$ oraz $a_1 = 1$. Czy możliwym jest znalezienie wzoru na sumę jego n pierwszych wyrazów? Spróbujmy znaleźć wzór na n-ty wyraz.

Wskazówka: W tym celu dokonać założenia, że $a_n = q^n$, podstawić do rekurencji, a następnie dostać równanie kwadratowe na dwa możliwe q, po czym z dwóch otrzymanych ciągów złożyć wyjściowy ciąg jako liniową kombinację i znaleźć sumę jego n pierwszych wyrazów.

Kryteria zbieżności szeregów.

Zadanie 6. Niech $p \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right) < \infty \Leftrightarrow (p > 1).$$

Wskazówka: Załatwić sporą część pracy sprawdzając warunek konieczny zbieżności szeregu, po czym dobrze zrozumieć kryterium zagęszczeniowe.

Zadanie 7. Z poprzedniego zadania wiemy, że suma szeregu harmonicznego jest rozbieżna. Wiemy też jak zachowuje się $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Sprawdzić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

którego wyrazy subtelniej uciekają do zera, aniżeli wyrazy dowolnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ dla $p > 1$.

Wskazówka: Kryterium zagęszczeniowe.

Zadanie 8. Aby ostatecznie rozprawić się z szeregiem harmonicznym, obliczyć

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\ln N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right).$$

Ciekawostka: $\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N \right) = \gamma \simeq 0.57721$. Jest to gamma Eulera–Mascheroniego.

Zadanie 9. Znaleźć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Zadanie 10. Korzystając z dostępnych narzędzi rozstrzygnąć o zbieżności szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+n^2+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} n)^n}{2^n}$,

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+\sqrt{n}}{8n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n+1)7^n}{2^{n+1}\,3^{n-1}}$.

Wskazówka: W punkcie d) zbadać granicę wyrazu ogólego i porównać, a później drugą metodą - stosując kryterium Cauchy'ego. W punktach a),b),c),d) porównywać, w pozostałych zdecydować między kryterium Cauchy i d'Alemberta.

Udanej zabawy!