Tydzień nr 9-10 (16 maja - 29 maja), Równania różniczkowe, wartości własne, funkcja wykładnicza od operatora - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przzemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Równania różniczkowe

Zadanie 1. Rozwiązać równania różniczkowe

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x - y\sin x = 2x$, gdzie $y(0) = 0$,

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy - xe^{x^2}$,

c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sin y + y\cos y + x = 0$.

Wskazówka: Są to poznane na wykładzie równania liniowe, ewentualnie po wykonaniu prostego podstawienia.

Zadanie 2. Rozwiązać ogólnie równania:

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3\sin y}{2(1-2\mathrm{e}^{-x})}$,

b) $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - x^2$,

c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (2x + y - 3)^2 - 4x - 2y + 5$.

Wskazówka: Są to poznane na wykładzie równania o zmiennych rozdzielonych, ewentualnie po wykonaniu prostego podstawienia.

Zadanie 3. Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y - \frac{2}{y^2}$,

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - 7y^3$,

c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$, gdzie $y(1) = 1$.

Wskazówka: Są to poznane na wykładzie równania Bernoulliego.

Zadanie 4. Rozwiązać równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wskazówka: Jest to równanie jednorodne. W zmiennej $u = \frac{y}{x}$ jest równaniem o rozdzielonych zmiennych.

Zadanie 5. Znaleźć krzywą na płaszczyźnie, dla której odstęp stycznej od początku układu współrzędnych w każdym punkcie jest równy pierwszej współrzędnej tego punktu.

Wartości własne. Funkcja wykładnicza.

Zadanie 6a. Niech A będzie macierzą 2x2 o rzeczywistych elemntach macierzowych. Znaleźć dla dowolnego A wartości własne. W tym celu obliczyć pierwiastki trójmianu $w(\lambda)$, będącego dla A tzw. wielomianem charakterystycznym,

$$w(\lambda) = \det\left(A - \lambda\mathbb{1}\right).$$

Dokonać analizy istnienia rozwiązań. Rozważyć sytuacje wyróżnika dodatniego, ujemnego i zerowego.

Wskazówka: Zauważyć, że dwa znane Wam już niezmienniki pełnią tu istotną rolę – ślad i wyznacznik. Zadanie ma duży walor rachunkowy, typowe zadania sprawdzające mogą wymagać właśnie operowania macierzami 2x2.

Zadanie 6b. Powtórzyć zadanie pierwsze dla macierzy o zespolonych współczynnikach. Ułatwienie – w ciele liczb zespolonych każdy trójmian ma dwa pierwiastki (uwzględniając krotności).

Zadanie 7.*(macierze Pauli'ego)* W poprzednich działach poznaliśmy macierze Pauliego i niektóre z ich własności (seria 3). Rozważmy rodzinę macierzy w $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ postaci $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, gdzie

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wiemy, że $\{\sigma_i, \sigma_j\} := 2\,\delta^i_j$, a $[\sigma_i, \sigma_j] := 2\mathrm{i}\,\varepsilon_{ijk}\sigma_j\sigma_k$. Wprowadźmy oznaczenie $\overline{\sigma x} := \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3$. Obliczyć $\det(\mathbb{1} + \overline{\sigma x})$ oraz $(\overline{\sigma x})^2$.

Zadanie 8. Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ mamy

$$A = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A + \vec{h}\cdot\vec{\sigma}.$$

Wyznaczyć $\vec{h}$. Innymi słowy, zapisać macierz A w bazie złożonej z jedynki oraz macierzy Pauliego.

Zadanie 9. Jeśli w poprzednim zadaniu zmienimy ciało na ciało liczb zespolonych wszystkie wzory zostaną takie same. Pod warunkiem, że wektor $\vec{h}$ będzie wektorem w $\mathbb{C}^3$. Rozstrzygnąć czy powyższe własności można stosować również w tym przypadku.

Zadanie 10a. Dobrze znana jest własność $e^{x+y} = e^x e^y$. Niestety w przypadku na ogół nieprzemiennych macierzy sytuacja wygląda gorzej. Sprawdzić, że dla macierzy, jeśli

$$[A, B] := AB - BA = 0,$$

tzn. macierze komutują – można je przestawiać jak liczby, to $e^{A+B} = e^A e^B$.

Wskazówka: Warto się przyjrzeć szeregom potęgowym i przypomnieć jakie wymagania stawiał dowód tego faktu dla funkcji wykładniczej.

$\star$**Zadanie 10b.** *(dowód przy pomocy równania różniczkowego z instrukcją)* Niech A, B będą macierzami spełniającymi zależność $[A, [A, B]] = 0$, tzn. komutator macierzy $[A, B]$ można zamieniać dowolnie miejscami z macierzą A. Celem zadania będzie wykazanie, krok, po kroku, że

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B].$$

Tożsamości takie i podobne oraz macierze Pauliego, pełnią istotną rolę w rachunkach na mechanice kwantowej. W pierwszym kroku dokonamy modyfikacji polegającej na dodaniu parametru t przy macierzy A, można go interpretować jak czas, mamy

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B].$$

Widać, że dla $t = 0$ obie strony są równe B i tym samym równość jest prawdziwa. Obserwujemy również, że dla $t = 1$ odtwarzamy początkowo postawiony problem. Zróżniczkować teraz obie strony po parametrze t i sprawdzić, że spełniają takie samo równanie różniczkowe.

Uwaga: Kiedy różniczkujemy funkcję od operatora musimy uważać, gdzie piszemy macierz, która powstaje w wyniku różniczkowania funkcji wewnętrznej. Macierze nie są przemienne. **Przestawiać względem siebie możemy tylko macierze, których komutator wynosi zero.**

$\heartsuit$**Zadanie 11.** Korzystając z poznanego rozkładu macierzy 2x2 oraz własności funkcji wykładniczej obliczyć ogólnie $\exp A$ dla dowolnej macierzy o zespolonych (rzeczywistych) elementach macierzowych.

Metoda reszt.

Zadanie 12. Korzystając z poznanej na wykładzie metody reszty z dzielenia przez wielomian charakterystyczny, obliczyć funkcję wykładniczą $\exp tA_i$ dla poniższych macierzy:

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

d) $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$

Równania liniowe

Zadanie 13. Przećwiczyć poznane metody obliczania funkcji wykładniczej od macierzy i rozwiązać zagadnienia początkowe:

a)
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + z & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x + z & y(0) = 2 \\ \dot{z} = x - y + z & z(0) = 3 \end{cases},$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 3y - z & y(0) = 1 \\ \dot{z} = -2x + 5y - z & z(0) = 3 \end{cases},$$

c)
$$\begin{cases} \dot{x} = y + z & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + z & y(0) = 0 \\ \dot{z} = x + y & z(0) = -1 \end{cases},$$

d)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 3z & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x + 3y + 5z & y(0) = 1 \\ \dot{z} = -x - 2y - 4z & z(0) = 1 \end{cases}.$$

Równania wyższego rzędu

Zadanie 14. Rozwiązać ogólnie równanie

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0.$$

Wskazówka: Dokonać ansatzu $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Pamiętać o warunku początkowym: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Założyć, że parametr λ jest zespolony i takiej dziedzinie rozwiązywać problem.

Zadanie 15. Rozważyć w powyższym zadaniu problem uzmienniania stałej. Pamiętać, że działa to tylko w przypadku równania pierwszego rzędu do którego powyższe równanie trzeba najpierw sprowadzić.

⋆**Zadanie 16.** W dwóch wymiarach laplasjan $\triangle$ to operator dany w kartezjańskich współrzędnych jako

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Równanie $\triangle f{=}0$ jest nazywane równaniem Laplace'a i pełni istotną rolę zarówno w fizyce, jak i w matematyce. Na jego temat można wiele przeczytać w literaturze z obu dziedzin nauki. Zajmiemy się szczególnym rozwiązaniem. Pracując w układzie biegunowym założyć, że $f(r,\varphi) = g(r)h(\varphi)$. Zapisać laplasjan w tym układzie i sprowadzić problem do równania zwyczajnego ze zmienną r. Czy da się je łatwo rozwiązać?

Zadanie 17. Rozwiązać ogólnie równania

a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin(\mathrm{e}^{-t}) + e^{2t}$,

b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t \log t$,

c) $\ddot{x} - x = 2t\cos t + e^t$.

Zadanie 18. Rozwiązać rozmaite równania drugiego rzędu

a) $yy'' = (y')^2 \log|y'|$, gdzie $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$,

b) $xy'' = y' + \sqrt{x^2 - (y')^2}$,

c) $2yy'' - 2(y')^2 + y^2 = 0$.