Tydzień nr 2 (21 - 25 lutego) - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Zbieżność bezwględna. Kryterium Dirichleta. Kryterium Leibniza.

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{|n - \frac{2011}{2}|}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2011 + (-1)^n}{n}$

Szeregi potęgowe.

Zadanie 2. Znajdź promień zbieżności szeregów.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n^2+1} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7x+1)^{2n}}{n^7}$

Zadanie 3. Dla podanej funkcji znajdź jej rozwinięcie w szereg potęgowy i oblicz jego promień zbieżności:

a) $\operatorname{arc\,tg} x$,

b) $\ln(1+x)$.

Wskazówka: Zróżniczkowana funkcja rozwija się prosto w szereg geometryczny, który później należy scałkować.

Ciekawostka: Ile wynosi suma szeregu anharmonicznego $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$? Dlaczego?

Zadanie 4. Funkcja wykładnicza e^x jest bardzo istotna w analizie. Rozważanie ciągłej kapitalizacji odsetek doprowadziło w roku 1683 Jacoba Bernoulliego do badania liczby $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Granica ta definiuje niewymierną liczbę rzeczywistą e. Korzystając z odkrytej przez siebie nierówności udowodnił liczne fakty na temat funkcji wykładniczej. Wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x.$$

Stąd uzasadniona jest notacja i definicja

$$\mathrm{e}^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$. W oczywisty sposób wynika stąd również własność potęgowania $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$. Można wykazać, że

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Zbadać promień zbieżności tego szeregu. Wykazać bezpośrednim rachunkiem, że ma on własność $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$. Jak udowodnić, że obie definicje są równoważne?

Wskazówka: Każdy wie jak różniczkować „e do iks”. Wykonać różniczkowanie dla obu definicji.

Zadanie 5. Korzystając z poprzedniego zadania znaleźć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(n-1)!\,5^n}.$$

Zadanie 6. Całkując szereg geometryczny obliczyć

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)5^{2n}}.$$

Zadanie 7. Ze znajomości rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg potęgowy wydedukować rozwinięcia w szeregi potęgowe funkcji: $\sin x$, $\cos x$, $\cosh x$, $\sinh x$. Czy funkcje hiperboliczne spełniają tożsamość analogiczną do „jedynki trygonometrycznej”? Jeśli tak to jak przejść od jednej do drugiej? Czy to możliwe?

Wskazówka: Postać trygonometryczna liczby zespolonej będzie nieocenioną pomocą.

Udanej zabawy!