Tydzień nr 2.5 - 3 (25 lutego - 4 marca) - Matematyka II 2010/2011L, zadania uzupełniające

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Podstawowe pojęcia algebry liniowej na ogólnym przykładzie. Liczby rzeczywiste, zespolone i ciekawe przykłady macierzy.

Zadanie 0. Znaleźć (o ile istnieje) macierz S taką, że

$$S\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix},\quad S\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},\quad S\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.*(rozważania na temat wielomianów)* Przestrzeń wielomianów jest ciekawym przykładem przestrzeni wektorowej. Należy wiedzieć, że wektor jest funkcją i ma również swój argument, o którym czasem trzeba pamiętać, a czasem zapomnieć. Niech, w zgodzie z wykładem, $\mathbb{R}_n[\cdot]$ oznacza przestrzeń wielomianów o rzeczywistych współczynnikach, których stopień jest niewiększy od n. Podobnie $\mathbb{R}[\cdot]$ będzie oznaczać przestrzeń wszystkich wielomianów. Znamy dwie naturalne operacje podnoszące, bądź opuszczające stopień wielomianu: całkowanie i różniczkowanie. Całkowanie możemy ujednoznacznić tak, że wybieramy ten wielomian, który zeruje się w punkcie $t=0$. Naturalnie są to operacje liniowe. Jak wygląda ich macierz w bazie $\{t^i\}_{i\in\mathbb{N}}$? Jak w bazie $\left\{\sum_{i=0}^{k} t^i\right\}_{k\in\mathbb{N}}$? Jak wygląda operacja przejścia między bazami? Jakie mają jądro i obraz? Czy są wzajemnie odwrotne? Rozważyć te same pytania po obcięciu obu operacji do wielomianów stopnia nie większego niż N, jakie będą różnice?

Wskazówka: W drugiej sytuacji całka z wielomianu najwyższego stopnia wynosi zero.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ oznacza kwadratowe macierze 2x2 o rzeczywistych elementach. Pokazać, że $\epsilon^2=\mathbb{1}$, jeśli

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\ni\epsilon=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Zauważyć dzięki temu, że liniowe odwzorowanie

$$\mathbb{C}\ni(a+\mathrm{i}b)\longmapsto(a\mathbb{1}+b\,\epsilon)\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$$

zachowuje działania na liczbach zespolonych. Przemyśleć fakt, że powyższe odwzorowanie zadaje izomorfizm

$$\mathbb{C}\simeq\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{1},\,\epsilon\}\subset\mathbb{M}_2(\mathbb{R}).$$

Zadanie 3. *(macierze Pauli'ego)* W poprzednim zadaniu poznaliśmy sposób na znalezienie jednostki urojonej i w macierzach 2x2 o rzeczywistych współczynnikach. Rozważmy tym razem rodzinę macierzy w $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ postaci $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, gdzie

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \mathrm{i}\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że $\{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\,\delta^i_j$. Co można powiedzieć o wyrażeniu $[\sigma_i, \sigma_j] := \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$. Wprowadźmy oznaczenie $\overline{\sigma x} := \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3$. Obliczyć $\det(\mathbb{1} + \overline{\sigma x})$ oraz $(\overline{\sigma x})^2$.

Ciekawostka 1.: Dzięki własnościom tych macierzy bardzo łatwo liczyć szeregi macierzy, a co za tym idzie funkcje od macierzy.

Ciekawostka 2.: Podobnie jak w zadaniu drugim, dzięki tym macierzom można znaleźć izomorfizm $\mathbb{H} \simeq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{1}, \mathrm{i}\,\sigma_k\} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ ciała kwaternionów z macierzami zespolonymi.

Ciekawostka 3.: Dzięki ich własnościom macierze Pauli'ego odgrywają ogromną rolę w konstruowaniu reprezentacji grup, badaniu spinorów i algebr Clifforda, a co za tym idzie, są ważnym narzędziem stosowanym do opisu fermionów w kwantowej teorii pola.

Zadanie 4. *(pożyteczności ciąg dalszy)* Rozważmy odzworowanie $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ dane wzorem

$$T(A) = \sigma_1 A \sigma_1 - A^T.$$

Zapisać odwzorowanie w bazie standardowej. Jaka baza byłaby wygodniejsza? Znaleźć jądro, obraz oraz wyznacznik tego odwzorowania. Jak należy o nim myśleć?

Udanej zabawy!