Tydzień nr 2.5 - 3 (25 lutego - 4 marca) - Matematyka II 2010/2011L, zadania podstawowe

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Zadanie 1 Niech $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów stopnia nie większego niż 2 o współczynnikach rzeczywistych. Sprawdzić, że wektory f_1, f_2, f_3 tworzą bazę w V i znaleźć współrzędne wektora w w tej bazie. Współrzędne wektora w bazie można znaleźć na dwa sposoby: mniej ogólny polegający na rozwiązaniu odpowiedniego układu równań i bardziej ogólny polegający na znalezieniu macierzy przejścia z bazy standardowej

$$(e_1(t) = 1, \;\; e_2(t) = t, \;\; e_3(t) = t^2)$$

do danej bazy f. Proszę skorzystać z obu sposobów.

$$f_1(t) = 1 + t, \qquad f_2(t) = 1 - t, \qquad f_3(t) = t^2 + t, \qquad w(t) = 2t^2 + 3t + 1.$$

Zadanie 2 Treść jak w zadaniu 1 dla następujących danych: $V = \mathbb{R}^4$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Niech $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów stopnia nie większego niż 2 o współczynnikach rzeczywistych. Definiujemy odwzorowanie liniowe

$$D : V \to V : \qquad D(v) = v'$$

tzn. jeśli $v(t) = at^2 + bt + c$, to $(Dv)(t) = v'(t) = 2at + b$. **(a)** Znaleźć macierz $[D]^e{}_e$ odwzorowania D w bazie standardowej e w V złożonej z wielomianów.

$$e_1(t) = 1, \quad e_2(t) = t, \quad e_3(t) = t^2.$$

(b) Znaleźć także macierz $[D]^f{}_f$ tego samego odwzorowania w bazie f złożonej z wielomianów

$$f_1(t) = 1, \;\; f_2(t) = 1 + t, \;\; f_3(t) = 1 + t + t^2.$$

Zadanie (b) można wykonać na dwa sposoby: znajdując macierz wprost z definicji macierzy odwzorowania oraz mnożąc macierz uzyskaną w punkcie (a) przez odpowiednie macierze zmiany bazy. Proszę wypróbować obie metody.

Zadanie 4 W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ definiujemy dwie podprzestrzenie $V_0 = \ker A$, $V_1 = \operatorname{im} A$. Sprawdzić, czy $v \in V_0 + V_1$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -10 & -7 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5 Niech V będzie przestrzenią wektorową macierzy 2×2 o współczynnikach zespolonych Rozważmy odwzorowanie

$$T : V \longrightarrow V, \qquad T(A) = \sigma_1 A \sigma_1 - A^T \text{ dla } \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie standardowej oraz w bazie złożonej z macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć jądro, obraz oraz wyznacznik tego odwzorowania.