Tydzień nr 3 i 4 (28 lutego - 11 marca) - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Alegbry liniowej ciąg dalszy. Baza przestrzeni wektorowej. Odwzorowania liniowe i ich macierze.

Zadanie 1. Niech dane będą dwie przestrzenie wektorowe V oraz W z bazami odpowiednio $\{e_i\}$ oraz $\{f_i\}$, takie, że $\mathrm{dim} V = \mathrm{dim} W$. Dane jest odwzorowanie liniowe $F : V \to W$ wzorem

$$F(e_i) = f_i,$$

dla dowolnego $i \in \{1, ..., \mathrm{dim} V\}$. Znaleźć macierz tego odwzorowania w zadanych bazach. Zinterpretować rezultat. Jak wygładałaby sytuacja, gdy $V = W$?

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}_3[\cdot]$ określamy podprzestrzeń wektorową warunkiem $w(1) = 0$ (jest to warunek liniowy, co to znaczy?). Innymi słowy rozważamy podprzestrzeń wielomianów zerujących się w punkcie $t = 1$. Jaki jest jej wymiar? Znaleźć operator, którego obrazem jest ta podprzestrzeń. Jaka podprzestrzeń jest jego jądrem?

Wskazówko-metoda: Znaleźć dopasowaną do tego warunku bazę i zapisać ów operator jako macierz w bazach standardowa-standardowa oraz dopasowana-dopasowana. Zastanowić się jakie wskazówki dotyczące operowania wielomianami płyną z tego zadania?

Zadanie 3. Powtórzyć poprzednie zadanie dla warunku $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(1) = 0$, czyli dla podprzestrzeni wielomianów, których pochodna zeruje się w $t = 1$. Jaki jest jej wymiar w porównaniu z poprzednią? Czym się różni od poprzedniej z punktu widzenia algebry liniowej?

Zadanie 4. Niech dana będzie przestrzeń wektorowa V z pewną bazą e. Znaleźć macierz przekształcają współrzędne wektorów w tej bazie na ich współrzędne bazie składającej z wektorów zapisanych jako

$$[f_1]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [f_2]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [f_3]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [f_4]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Niech

$$[T]^e{}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć $[T]^f{}_f$, $[T]^e{}_f$ oraz $[T]^f{}_e$. Uwaga! Jeśli to polecenie przemyśleć to wcale nie jest dużo pracy! Którą z macierzy mamy prawie za darmo (tzn. za cenę jednego mnożenia macierzy)?

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określmy operator

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć P^2, znaleźć jego jądro oraz obraz. Jakie równania (układy równań) zadają owe podprzestrzenie? Czy ten operator ma jakąś specjalną własność?

Obowiązują także zadania 1-3 z pliku wykład1.pdf str. 4-5

Przygotowanie do form kwadratowych i liczenia ich sygnatur. Przedwczesne zadania dotyczące wyznacznika.

Zadanie 6. Pracując wprost, korzystając z definicji

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$$

sprawdzić, że wyznacznik iloczynu macierzy 2x2 jest iloczynem wyznaczników tychże macierzy.

Zadanie 7. Powtórzyć poprzednie rozumowanie dla macierzy 3x3. A może lepiej nie, gdyż jest zbyt rachunkowe? Zastanowić się jakie ogólne własności wyznacznika pomagają nam rozwiązać ten problem? Jak pomaga nam wzór Laplace'a jeśli go znamy?

Zadanie 8. Wyprowadzić wzór na pierwiastki trójmianu kwadratowego poprzez sprowadzenie go do postaci kanonicznej. Jaką funkcję (w języku form kwadratowych) pełni postać iloczynowa?

Zadanie 9. Na $\mathbb{R}^4$ określmy formę kwadratową wzorem

$$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longmapsto Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 14x^2 + 3x_4^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3 - 12x_3x_4.$$

Udowodnić, że $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0 \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda\,(1,2,4,8)$.

Zadanie 10. Przekształcić poniższe wyrażenia tak, by składały się z sumy, bądź różnicy kwadratów pewnych wyrażeń:

a) $Q_1(x,y,z) = 3x^2 - 5y^2 + 2zy + 3xz$,

b) $Q_2(x,y,z) = 2x^2 + 4xy - 3z^2 + 2z(x+y)$,

c) $Q_3(x,y,z) = xy - yz - zx$,

d) $Q_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$.

Udanej zabawy!