Tydzień nr 5 (14 - 19 marca) - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Grupy permutacji

Zadanie 1. Scharakteryzować grupy permutacji zbiorów o niskiej liczebności, tj.: zbiórów jedno-, dwu-, trzy- i czteroelementowych.

Wskazówka: Jeśli pojęcie grupy jest niejasne, należy zrozumieć, ile permutacji jest, które są wzajemnie odwrotne i jak się ze sobą składają jako odwzorowania.

Zadanie 2. Wiedzę z poprzedniego zadania wzbogacić o pojęcia cyklu oraz orbity. Co to znaczy rozłożyć permutację na cykle? Spróbować rozłożyć na cykle losowe przykłady permutacji zbioru o większej liczbie elementów.

Zadanie 3. W grupie permutacji zbioru czteroelementowego mamy daną permutację (1 2)(3 4). Znaleźć wszystkie permutacje, które można otrzymać przy pomocy operacji $\sigma(1\ 2)(3\ 4)\sigma^{-1}$, gdzie σ jest dowolną permutacją.

Wskazówka: Korzystając z odwracalności permutacji można wcisnąć jedynkę pomiędzy dwie transpozycje.

Zadanie 4. Złożenie dwóch permutacji parzystych jest permutacją parzystą. Możemy więc ograniczyć się tylko do permutacji parzystych zbioru np. czteroelementowego. Rozważana wcześniej permutacja (1 2)(3 4) jest parzysta. Powtórzyć poprzednie zadanie ograniczając się właśnie do permutacji przystych. Co się zmieniło i dlaczego? Czy w zbiorze otrzymanych permutacji można zauważyć coś ciekawego?

Ciekawostka: To co tu robiliśmy ma coś wspólnego z twierdzeniem Gallois mówiącym o nieistnieniu ogólnego wzoru na pierwiastki wielomianu piątego stopnia.

Zadanie 5. Sprawdzić, że $\sigma(k) := \frac{1}{2}\left(|4k-53|+1\right)$ zadaje permutację zbioru $\{1,2,3,\ldots,25\}$. Znaleźć jej rozkład na cykle, obliczyć znak σ oraz znaleźć wzór opisujący σ^{-1}.

Wskazówka: Odwrotną permutację dostaniemy znajdując wyrażenie opisujące k w funkcji $\sigma(k)$.

Wyznaczniki, macierz odwrotna

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli macierz odwracalna posiada własność taką, że suma wyrazów w każdym jej wierszu jest taka sama, to macierz do niej odwrotna również tę własność posiada. Jaka jest suma wyrazów w wierszach macierzy odwrotnej?

Zadanie 7. Korzystając z własności macierzy dopełnień algebraicznych odwrócić poniższe macierze.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ponadto sprawdzić z definicji, że dla dowolnej macierzy A mamy $A \cdot A^D = \det(A)$. Ocenić też, kiedy wygodniej użyć macierzy dopełnień algebraicznych, a kiedy lepiej odwrócić macierz rozwiązując układ równań.

Zadanie 8. Pracując w ustalonej bazie $\{e_i\}$ możemy zdefiniować odwzorowanie dwuliniowe $v^T w$ (możymy wiersz przez kolumnę). Zdefiniujmy nowa bazę $\{f_i\}$ o własności takiej, że dla $i \neq j$ mamy $(f_i)^T f_j = 0$. Uzadanić, że iloczyn macierzy odwrotnej do macierzy przejścia z bazy f do bazy e i niej samej jest macierzą diagonalną. Kiedy jest ona jednostkowa? Jak łatwo uzyskać macierz odwrotną w takiej sytuacji? Macierze złożone z kolumn (wierszy) o takiej własności, że transponowana jest zarazem odwrotną, nazywamy ortogonalnymi.

Formy kwadratowe i symetryczne.

Zadanie 9. *(rzeczywista formuła polaryzacyjna)* Przypomnieć sobie pojęcia formy symetrycznej z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ oraz formy kwadratowej V do $\mathbb{R}$. Po przypomnieniu okaże się oczywistym, że forma kwadratowa powstaje przez obcięcie symetrycznej do diagonali iloczynu kartezjańskiego $V \times V$. Wykazać, że mając formę kwadratową można odzyskać dwuliniową, z której ona powstała. Czy odzyskana dwuliniowa forma jest określona jednoznacznie?

Zadanie 10. *(ciekawy iloczyn skalarny)* Niech A, $B \in \mathbb{M}_{n\times n}$. Śladem macierzy A nazywamy sumę wszystkich jej diagonalnych wyrazów, oznaczamy go $\mathrm{Tr}(A)$. Sprawdzić, że ślad jest odwzorowaniem liniowym oraz, że $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Wywnioskować stąd, że ślad jest niezmiennikiem podobnie jak wyznacznik. Następnie rozważyć formę

$$\mathbb{M}_{n\times n} \times \mathbb{M}_{n\times n} \ni (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB) \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzić, że jest to dwuliniowa forma symetryczna.

Zadanie 11. Znaleźć bazy diagonalizujące formę kwadratową $Q : V \to \mathbb{R}$:

a) $Q(x) := x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1, \quad V := \mathbb{R}^3,$

b) $Q(x) := \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} (x_i)^2\right), \quad V := \mathbb{R}^n,$

c) $Q(X) := \det(X), \quad V := \mathbb{M}_{2\times 2}.$

Udanej zabawy!