# Tydzień nr 6-7 (28 marca - 11 kwietnia), rozpoczynamy analizę funkcji wielu zmiennych - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

## Ciągłość i pochodna funkcji wielu zmiennych

Z wykładu wynieśliśmy informację o tym, że rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych jest nieco trudniejszy, niż rachunek funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Powodem tego jest chociażby to, że do punktu na prostej możemy się zbliżać z dwóch stron — z prawej, bądź z lewej — a do do punktu w przestrzeni wymiaru dwa bądź większego możemy zbliżać się po rozmaitych łukach, spiralach, prostych i innych, znacznie dziwniejszych krzywych. W przypadku punktu nieciągłości dla funkcji z $\mathbb{R}$ możemy często zdefiniować pochodną prawo- i lewostronną. Celem pierwszych kilku zadań będzie zrozumienie, że nieciągłość wygląda dużo gorzej w przypadku funkcji wielu zmiennych. Ponadto, ćwiczenia pokażą Państwu, że istotnym, trudnym w nowy sposób przypadkiem, są funkcje z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

Na wykładzie poznaliśmy funkcję ciągłą $\Phi$, określającą współrzędne biegunowe. Dalej będę używał tego oznaczenia. Przypomnijmy,

$$\Phi : [0,\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

takie, że

$$\Phi : [0,\infty[\times[0,2\pi[\ni (r,y) \mapsto (x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

**Zadanie 1.** Przypomnieć sobie poniższe tożsamości

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

b) $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$

Jako szczególne przypadki obliczyć $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$. Wyprowadzić jeden ze wzorów na sumę funkcji trygonometrycznych, np. $\cos\alpha + \cos\beta$.

***Wskazówka:*** Skorzystać ze wzoru $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$

**Zadanie 2.** Obliczyć złożenia $f_i(\Phi(r,\varphi))$ dla podanych $f_i$:

a) $f_1 = ax^2 + by^2,\ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

b) $f_2 = \frac{xy}{x^2+y^2},\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

c) $f_3 = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4},\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

d) $f_4 = \begin{bmatrix} x^2-y^2 \\ x^2+y^2 \\ 2xy \end{bmatrix},\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

e) $f_5 = \frac{xy^2}{y^3+x^6}$, $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

**Zadanie 3.** Krzywa $\gamma$ w $\mathbb{R}^n$ to odwzorowanie ciągłe $\gamma : ]-1,1[ \to \mathbb{R}^n$. Dla użyteczności założymy, że $\gamma$ można różniczkować dowolnie wiele razy. Zdefiniujmy krzywe w $\mathbb{R}^2$, w bazie standardowej:

a) $\gamma_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ at \end{bmatrix}$,

b) $\gamma_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ at^2 \end{bmatrix}$,

c) $\gamma_3(t) = \begin{bmatrix} at^2 \\ t \end{bmatrix}$,

d) $\gamma_4(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$,

e) $\gamma_5(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jakie wykresy odpowiadają tym krzywym? Obliczyć w każdym przypadku

$$\lim_{t\to 0}(f_5 \circ \gamma_i)(t).$$

Proszę zauważyć, że złożenia funkcji z krzywą zawsze są funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej!

**Zadanie 4.** Obliczyć pochodne funkcji $f_i$ z drugiego zadania.

**Zadanie 5.** Obliczyć pochodne złożeń $f_i \circ \Phi$ z drugiego zadania. Czy warto to robić wprost? Proszę skorzystać również ze wzoru na pochodną złożenia. Zysk jest taki, że można policzyć pochodną $\Phi$ „raz na zawsze”. Zauważyć, też, że wzór na złożenie wymusza na nas mnożenie macierzy, często prostokątnych, a nie kwadratowych!

**Zadanie 6.** Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

**Zadanie 7.** Obliczyć $(F \circ G)'$ wiedząc, że

$$F(x) = (x^2, x^3, x^4) \text{ oraz } G(x,y) = 2x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}}.$$

## Gradient. Geometria w biegunowym układzie współrzędnych.

**Zadanie 8.** Obliczyć wyrażenie na gradient funkcji dwóch zmiennych w układzie biegunowym i walcowym. Zauważyć, że układ walcowy i biegunowy są bardzo podobne – trzecia współrzędna przekształca się trywialnie. Proszę, w zgodzie z wykładem (wyklad4.pdf) znaleźć macierz $G$ złożoną z iloczynów skalarnych nowych wektorów stycznych. Proszę zapisać gradient w układzie biegunowym dla wybranych funkcji z poprzednich zadań.

**Zadanie 9.** Niech $\Psi : [0,\infty[\times[0,\pi[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem

$$\Psi(r,\theta,\varphi) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Określa ono (po obcięciu dziedziny w odpowiedni sposób) układ sferyczny w $\mathbb{R}^3$. Obliczyć gradient w tym układzie współrzędnych. Proszę zauważyć, że w obu zadaniach wektory styczne do lini siatki są ortogonalne!

**Zadanie 10.** Obliczyć gradient funkcji $f(x,y,z) = \frac{2xy}{x^2+y^2+z^2}$. Wyrazić go w układzie sferycznym i kartezjańskim.

**Zadanie 11.** *(współrzędne paraboliczne)* Zdefiniujmy $\Upsilon : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wzorem

$$\Upsilon(\sigma,\tau) = \left(\sigma\tau, \frac{1}{2}\left(\tau^2-\sigma^2\right)\right).$$

Określić dla jakiego podzbioru otwartego $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ obcięcie $\Upsilon|_{\mathcal{O}}$ jest bijekcją na obraz, tzn. zadaje krzywoliniowy układ współrzędnych na obrazie. Wyrazić naturalne wektory bazowe $p_\sigma$ oraz $p_\tau$ poprzez wektory $e_x$ oraz $e_y$. Znaleźć macierz iloczynu skalarnego w bazie $\{p_i\}$. Korzystając z tego wyniku przedstawić gradient we współrzędnych parabolicznych.

**Zadanie 12.*** *(trójwymiarowe współrzędne paraboliczne)* Zdefiniujmy $\Upsilon : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem

$$\Upsilon(\sigma,\tau,\varphi) = \left(\sigma\tau\cos\varphi, \sigma\tau\sin\varphi, \frac{1}{2}\left(\tau^2-\sigma^2\right)\right).$$

Określić dla jakiego podzbioru otwartego $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ obcięcie $\Upsilon|_{\mathcal{O}}$ jest bijekcją na obraz, tzn. określa krzywoliniowy układ współrzędnych na obrazie. Wyrazić naturalne wektory bazowe $p_\sigma$, $p_\tau$ oraz $p_\varphi$ poprzez wektory $e_x$, $e_y$ oraz $e_z$. Znaleźć macierz iloczynu skalarnego w bazie $\{p_i\}$. Korzystając z tego wyniku przedstawić gradient w trójwymiarowych współrzędnych parabolicznych.

***Udanej zabawy!***