Tydzień nr 8 (11 kwietnia - 18 kwietnia), pochodne we współrzędnych krzywoliniowych, ekstrema funkcji wielu zmiennych – Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Pochodne funkcji w krzywoliniowych układach współrzędnych

Zadanie 0. Przechodząc do układu biegunowego rozwiązać równanie różniczkowe

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,f(x,y).$$

Wskazówka: Zapisać pochodne we współrzędnych kartezjańskich za pomocą pochodnych we współrzędnych biegunowych.

($\star$)**Zadanie 1.** Sprawdzić że funkcja $f_{A,B,G}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dana jako

$$f_{A,B,G}(x,y)=G(x^2+y^2)\left(Axy+B(x^2-y^2)\right),$$

gdzie $A,B\in\mathbb{R}$ oraz $G:\mathbb{R}_+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ są dowolne, spełnia równanie

$$\left[\left(y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)-\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]f_{A,B,G}=-4f_{A,B,G}.$$

Wskazówka: Zapisać pochodne we współrzędnych kartezjańskich za pomocą pochodnych we współrzędnych biegunowych.

Zadanie 2. Obliczyć $\vec{\nabla}f_i$ dla:

a) $f_1(x,y,z)=xyz^3$, (w układzie walcowym),

b) $f_2(x,y)=\frac{x^2y^2}{4(x^2+y^2)^2}$, (w układzie biegunowym),

c) $f_3(x,y,z)=\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, (w układzie sferycznym i walcowym).

Ekstrema funkcji

Zadania rozgrzewkowe

Zadanie 3. Udowodnić, że spośród prostopadłościanów o zadanym polu, największą objętość ma sześcian.

($\star$)**Zadanie 4.** Uogólnić poprzednie zadanie na prostopadłościan w dowolnym wymiarze. Przyjąć, że jest on rozpięty przez wektory $a_i e_i$, gdzie a_i to długości krawędzi, a e_i kanoniczne wektory bazowe w $\mathbb{R}^n$. Przedyskutować, ile krawędzi i ile ścian ma taki prostopadłościan uogólniony.

Wskazówka: By „wyobrazić" sobie taki prostopadłościan, należy zauważyć, że powstaje on z mnożenia „mniejwymiarowego" prostopadłościanu przez odcinek – więc krawędzie powstają z wierzchołków, a ściany z krawędzi.

Zadanie 5. Znaleźć krawędzie graniastosłupa foremnego o podstawie będącej n-kątem tak, by ich suma była jak najmniejsza, przy zadanej objętości V.

($\heartsuit$)**Zadanie 6a.** *(edukacyjne o elipsie)* Wiemy, że elipsę można zapisać parametrycznie, bądź zadać równaniem. Klasycznie jednak, elipsa jest zbiorem punktów, dla których suma odległości od ognisk jest stała i równa $2d$. Obliczyć długości półosi (a – wielka, b – mała) w elipsie, jeśli odległość między ogniskami wynosi $2c$. Mimośrodem elipsy (czasem nazywanym ekscentrycznością), jest iloraz $\epsilon = \frac{c}{a}$. Wyrazić mimośród za pomocą a i b. Sporządzić rysunek elipsy nanosząc na niego wszystkie poznane geometryczne parametry.

($\star$)**Zadanie 6b.** *(obwód elipsy)* Pole elipsy policzyć można bardzo prosto, wyrażone przez półosie wynosi ono πab. Niestety niemożliwym jest znalezienie ogólnego wyrażenia na obwód. Zadaje go eliptyczna całka Eulera drugiego rodzaju, mamy

$$l = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Znaleźć mimośród elipsy, która przy zadanym polu, ma najmniejszy obwód.

Wskazówka: Można różniczkować wyrażenie podcałkowe. Potraktować mimośród jako funckję pola elipsy i półosi wielkiej. Zauważyć, że długość rośnie wraz z długością półosi wielkiej. Jeśli rachunki okażą się zbyt zawiłe, sprawdzić przypadek $a = b$.

Badanie funkcji wokół punktu ekstremalnego

Zadanie 7. Znaleźć najwieksza i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

w trójkącie ograniczonym prostymi: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Zadanie 8. Znaleźć i zbadać punkty ekstremalne podanych funkcji:

a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$,

b) $f(x,y) = 3x^2y - 6xy + y^3$,

c) $f(x,y) = (5x + 7y - 25)\,\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$,

d) $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$.

Uwaga: Zadanie takie jest typowe i można powtórzyć je dla bardzo wielu funkcji. Różne funkcje do badania można znaleźć w typowych zbiorach zadań. Można również badać funkcje, które samemu się wymyśli. Być może niedługo pojawi się lista kilkunastu funkcji wielu zmiennych do badania.

Badanie lokalnej odwracalności, wstęp do funkcji uwikłanych

Zadanie 9. Sprawdzić, że odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(s,t) := (s + t\sin s, \log|\cos s| + t\cos s),$$

jest odwracalne na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$. Wykazać, że współrzędne S, T odwzorowania odwrotnego $\Phi^{-1}(x,y) = (S(x,y), T(x,y))$ spełniają równania:

$$\|\vec{\nabla} T\|^2 := (T'_x)^2 + (T'_y)^2 = 1, \ \left(\vec{\nabla} S|\vec{\nabla} T\right) := S'_x T'_x + S'_y T'_y = 0, \ \|\vec{\nabla} S\| = (T + \frac{1}{\cos S})^{-1}.$$

Zadanie 10. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto z(x,y) \in \mathbb{R}$, zdefiniowanej niejawnie równaniem:

a) $0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2$,

b) $0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + 1$,

c) $0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + z + 1$.

Udanej zabawy!