Tydzień nr 8,9 (18 kwietnia - 1 maja), ekstrema związane funkcji wielu zmiennych, funkcje uwikłane – Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na Przemyslaw.Majewski@fuw.edu.pl lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Znajdowanie ekstremów związanych metodą Lagrange'a

Zadanie 0. Powtórzyć zadania optymalizacyjne 3 – 6 z poprzedniej serii z wykorzystaniem metody mnożników Lagrange'a. Jakie można dostrzec zalety?

Zadanie 1. Spośród prostopadłościanów wpisanych w elipsoidę o półosiach a, b, c tak, że jego krawędzie są do tych półosi równoległe, znaleźć ten o największej objętości.

Zadanie 2. Spośród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć ten, którego pole jest największe.

Wskazówka: Wzór Herona na pole trójkąta to $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Zadanie 3. Na płaszczynie dane jest n punktów materialnych $P_i = (x_i, y_i)$ z masami m_i. Znaleźć punkt taki, by moment bezwładności względem tego punktu był najmniejszy.

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ ograniczamy obszar paraboloidą eliptyczną o równaniu

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

oraz płaszczyzną $z = c$. Wpisać w ten obszar prostopadłościan tak, by jego objętość była największa.

Zadanie 5. W okrąg o promieniu R wpisać czworokąt o danym kącie α tak, by jego pole było jak największe.

Zadanie 6. Na elipsie opisać trójkąt o największym polu pamiętając, by jego podstawa była równoległa do półosi wielkiej tej elipsy.

Zadanie 7. Na elipsoidzie $x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ znaleźć punkt najbardziej oddalony od punktu $(0, 0, 3)$.

Zadanie 8. Znaleźć ekstremum związane funkcji $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ przy warunku $xyzt = c^4$ dla x, y, z, t dodatnich.

Zadanie 9. Znaleźć ekstremum funkcji $f(x, y) = x + y$ na powierzchni

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Znajdowanie ekstremów funkcji uwikłanych

Zadanie 10. Obliczyć pierwszą oraz drugą pochodna funkcji uwikłanej $y(x)$ danej jako:

a) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$,

b) $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$,

c) $y - \varepsilon \sin y = x$,

d) $y = 2x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

Zadanie 11. Znaleźć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu oraz ekstrema, jeśli to wykonalne, funkcji $z(x, y)$ danej jako:

a) $x + y + z = e^{-x-y-z}$,

b) $x + y + z = e^z$,

c) $z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \left(z \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} \right)$.

d) $z^3 - xyz + y^2 = 16$,

e) $z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16$.

Udanej zabawy!