Wykład 10.

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Kolejny wykład poświęcony jest rozwiązywaniu liniowych równań wyższego rzędu (w wymiarze 1, tzn. na jedną funkcję. Ogólna postać takiego równania to

$$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = \alpha_{k-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{k-1}x}{\mathrm{d}t^{k-1}} + \alpha_{k-2}(t)\frac{\mathrm{d}^{k-2}x}{\mathrm{d}t^{k-2}} + \cdots + \alpha_1(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha_0(t)x + \beta(t), \tag{1}$$

gdzie zwyczajowo wyraz z najwyższą potęgą zostawiliśmy po lewej stronie. Właściwym postępowaniem okazuje się zamiana jednego równania rzędu k na układ k równań rzędu pierwszego poprzez wprowadzenie pomocniczych funkcji

$$y_0(t),\ y_1(t),\ \ldots,\ y_{k-1}(t) \tag{2}$$

takich, że niewiadoma funkcja x to $x(t) = y_0(t)$, pierwsza pochodna $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = y_1(x)$ i tak dalej, aż do pochodnej rzędu $k-1$: $\frac{\mathrm{d}^{k-1}x(t)}{\mathrm{d}t^{k-1}} = y_{k-1}(t)$. Równanie (1) Zastępujemy układem

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t} = y_1 \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}y_{k-2}}{\mathrm{d}t} = y_{k-1} \\ \frac{\mathrm{d}y_{k-1}}{\mathrm{d}t} = \alpha_{k-1}(t)y_{k-1} + \alpha_{k-2}(t)y_{k-2} + \cdots + \alpha_1(t)y_1 + \alpha_0(t)y_0 + \beta(t) \end{cases} \tag{3}$$

Powyższy układ jest układem liniowym, który można także zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Wiemy już, że ogólna metoda rozwiązywania tego rodzaju równań jest znana w przypadku, kiedy macierz układu równań jest stała, tzn. niezależna od zmiennej t. Oznacza to, że funkcje α_i są stałe: $\alpha_i(t) = \alpha_i$. W takim przypadku układ równań (4) rozwiązywać można stosując wszystkie poznane wcześniej techniki. Ze względu jednak na specyficzną postać macierzy układu równań można uzyskać (prostszą) metodę dostosowaną do tego przypadku. Tym bardziej, że interesuje nas tylko pierwsza współrzędna, czyli funkcja y_0. Pozostałe funkcje można wyznaczyć różniczkując y_0 odpowiednio wiele razy. Z teorii dotyczącej układów równań liniowych wiadomo, że powinniśmy uzyskać k liniowo niezależnych rozwiązań.

Oznaczamy macierz układu równań przez A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \end{bmatrix}$$

i wyznaczamy wielomian charakterystyczny ω_A:

$$\omega_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} - \lambda \end{bmatrix} = \tag{5}$$

stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza:

$$= (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} - \lambda \end{bmatrix} - (1) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} - \lambda \end{bmatrix} =$$

pierwszą macierz zostawiamy, drugą rozwijamy względem pierwszej kolumny:

$$= (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} - \lambda \end{bmatrix} - (1)(-1)^k \alpha_0 \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{bmatrix} = \tag{6}$$

Teraz pierwsza macierz ma taką samą postać jak macierz wyjściowa. Różnią się liczbą wierszy i kolumn. Każda z tych macierzy charakteryzowana jest przez liczbę kolumn i wierszy oraz wyrazy macierzowe z ostatniego wiersza. Wprowadzamy więc oznaczenie

$$D_k(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$$

na wyznacznik macierzy $k \times k$, która w ostatnim wierszu ma liczby $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, jak w (5). Ponieważ wyznacznik drugiej macierzy w (6) jest równy 1, wynik dotychczasowych rachunków w nowych oznaczeniach ma postać

$$D_k(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (-\lambda) D_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + (-1)^{p+1} \alpha_0.$$

Wyznacznik $D_k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ liczymy korzystając z rekurencji:

$$
\begin{aligned}
D_k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) &= (-\lambda) D_{k-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + (-1)^{k+1}\alpha_0 = \\
&(-\lambda)\left[(-\lambda) D_{k-2}(\alpha_2, \dots, \alpha_k) + (-1)^k \alpha_1\right] + (-1)^{k+1}\alpha_0 = \\
&(-\lambda)^2 D_{k-2}(\alpha_2, \dots, \alpha_k) + (-1)^{k+1}[\alpha_1\lambda + \alpha_0] = \\
&(-\lambda)^2\left[(-\lambda) D_{k-3}(\alpha_3, \dots, \alpha_k) + (-1)^{k-1}\alpha_2\right] + (-1)^{k+1}[\alpha_1\lambda + \alpha_0] \\
&(-\lambda)^3 D_{k-3}(\alpha_3, \dots, \alpha_k) + (-1)^{k+1}\left[\alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right] = \dots = \\
&(-\lambda)^{k-2} D_2(\alpha_{k-1}, \alpha_k) + (-1)^{k+1}\left[\alpha_{k-3}\lambda^{k-3} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right] =
\end{aligned}
$$

Wyznacznik $D_2(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$ obliczamy już bezpośrednio

$$
D_2(\alpha_{k-1}, \alpha_k) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} - \lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^2 - \alpha_{k-1}\lambda - \alpha_{k-2}
$$

i wstawiamy do rachunku:

$$
\begin{aligned}
&= (-\lambda)^{k-2} D_2(\alpha_{k-1}, \alpha_k) + (-1)^{k+1}\left[\alpha_{k-3}\lambda^{k-3} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right] = \\
&(-\lambda)^{k-2}(\lambda^2 - \alpha_{k-1}\lambda - \alpha_{k-2}) + (-1)^{k+1}\left[\alpha_{k-3}\lambda^{k-3} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right] = \\
&(-1)^k\lambda^k + (-1)^{k-1}\alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + (-1)^{k-1}\alpha_{k-2}\lambda^{k-2} + (-1)^{k+1}\left[\alpha_{k-3}\lambda^{k-3} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right] = \\
&(-1)^k\lambda^k + (-1)^{k+1}\left[\alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \alpha_{k-2}\lambda^{k-2} + \alpha_{k-3}\lambda^{k-3} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right] = \\
&(-1)^k\left(\lambda^k - \left[\alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right]\right).
\end{aligned}
$$

Warunek

$$\omega_A(\lambda) = 0$$

czyli

$$D_k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$$

ma więc postać

$$\lambda^k = \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \tag{7}$$

To samo równanie otrzymalibyśmy stosując tradycyjne (i w tym wypadku dużo prostsze) rozumowanie: Załóżmy, że rozwiązaniem równania (1) jest funkcja $t \mapsto x(t) = e^{\lambda t}$. Wówczas

$$\frac{\mathsf{d}^n x(t)}{\mathsf{d}t^n} = \lambda^n e^{\lambda t}.$$

Po wstawieniu tej *propozycji rozwiązania* do równania otrzymujemy warunek na λ w postaci identycznej z (7). Załóżmy teraz, że λ_i dla $i = 1 \dots r$ są pierwiastkami równania charakterystycznego, oznaczmy też przez n_i krotność pierwiastka λ_i. Mamy wtedy $r \leqslant k$ i $n_1 + n_2 + \dots + n_r = k$. Każdemu rzeczywistemu rozwiązaniu równania charakterystycznego odpowiada rozwiązanie równanie różniczkowego

$$t \longmapsto e^{\lambda_i t}.$$

Rozwiązań tych jest najwyżej r (zazwyczaj jest to mniej niż k). Jedynie w przypadku, kiedy wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i jednokrotne otrzymujemy komplet k niezależnych rozwiązań równania (1). Proste podstawienie, które można zastosować, żeby otrzymać równanie charakterystyczne, nie daje odpowiedzi na pytanie skąd wziąć brakujące rozwiązania, jeśli równanie charakterystyczne ma pierwiastki rzeczywiste wielokrotne, zespolone jednokrotne lub zespolone wielokrotne. Trzeba sięgnąć do doświadczeń z rozwiązywania układów równań liniowych nie pochodzących od równań wyższego rzędu. Rozwiązanie (4) ma, jak wiadomo postać:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{bmatrix} = \exp(At) \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Nas interesuje jedynie pierwsza współrzędna, czyli iloczyn pierwszego wiersza macierzy $\exp(At)$ przez wektor złożony ze stałych C. Wyznaczając wartości funkcji exp na różnych macierzach stwierdziliśmy, że istotnie jednokrotnym wartościom własnym macierzy A odpowiadają wyrazy typu $e^{\lambda t}$, ale zauważyliśmy także, że jeśli wartość własna jest dwukrotna i rzeczywista to w macierzy pojawiają się dodatkowo wyrażenia $te^{\lambda t}$, a jeśli wartość własna λ jest czysto urojona otrzymujemy kombinacje funkcji sin i cos. Opierając się więc na doświadczeniu możemy podać *przepis* na konstruowanie fundamentalnego układu rozwiązań dla dowolnego zestawu wartości własnych:

(1) **Rzeczywista jednokrotna wartość własna:** $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $n_i = 1$, rozwiązanie jest postaci

$$t \longmapsto Ce^{\lambda_i t},$$

pojedynczej wartości własnej odpowiada jeden dowolny parametr C.

(2) **Rzeczywista dwukrotna wartość własna:** $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $n_i = 2$, rozwiązanie jest postaci

$$t \longmapsto (C_1 t + C_0)e^{\lambda_i t},$$

podwójnej wartości własnej odpowiadają dwa dowolne parametry C_1, C_0.

(3) Ogólnie: **Rzeczywista n-krotna wartość własna:** $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $n_i = n$, rozwiązanie jest postaci

$$t \longmapsto (C_{n-1}t^{n-1} + C_{n-2}t^{n-2} + \cdots + C_1 t + C_0)e^{\lambda_i t},$$

n-krotnej wartości własnej odpowiada n dowolnych parametrów $C_{n-1}, \ldots, C_0$.

(4) **Zespolona jednokrotna wartość własna:** $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $n_j = 1$. W takiej sytuacji wartość własna $\lambda_j = a + bi$ ma zawsze do pary wartość własną sprzężoną $\lambda_j = a - bi$. Parze sprzężonych jednokrotnych wartości własnych odpowiada rozwiązanie

$$t \longmapsto e^{at}(C\sin(bt) + D\cos(bt)),$$

mające dwa dowolne parametry.

(5) **Zespolona dwukrotna wartość własna:** $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $n_j = 2$. Również w takiej sytuacji wartość własna $\lambda_j = a + bi$ ma zawsze do pary dwukrotną wartość własną sprzężoną $\lambda_j = a - bi$. Parze sprzężonych dwukrotnych wartości własnych odpowiada rozwiązanie

$$t \longmapsto e^{at}[(C_1 t + c_0)\sin(bt) + (D_1 t + D_0)\cos(bt)],$$

mające w sumie cztery dowolne parametry.

(6) Ogólnie: **Zespolona n-krotna wartość własna:** $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $n_j = n$. Wartość własna $\lambda_j = a + bi$ ma zawsze do pary n-krotną wartość własną sprzężoną $\lambda_j = a - bi$. Parze sprzężonych n-krotnych wartości własnych odpowiada rozwiązanie

$$t \longmapsto e^{at}[(C_{n-1}t^{n-1} + \cdots + C_1 t + c_0)\sin(bt) + (D_{n-1}t^{n-1} + \cdots + D_1 t + D_0)\cos(bt)],$$

mające w sumie $2n$ dowolnych parametrów.

Przykład 1. *(absurdalny)* Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\mathsf{d}^7x}{\mathsf{d}t^7} - 12\frac{\mathsf{d}^6x}{\mathsf{d}t^6} + 61\frac{\mathsf{d}^5x}{\mathsf{d}t^5} - 174\frac{\mathsf{d}^4x}{\mathsf{d}t^4} + 308\frac{\mathsf{d}^3x}{\mathsf{d}t^3} - 344\frac{\mathsf{d}^2x}{\mathsf{d}t^2} + 228\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} - 72x = 0.$$

Jest to liniowe jednorodne równanie siódmego rzędu. Odpowiednie równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^7 - 12\lambda^6 + 61\lambda^5 - 174\lambda^4 + 308\lambda^3 - 344\lambda^2 + 228\lambda - 72 = 0.$$

Równanie charakterystyczne zapisane w postaci iloczynowej (nad $\mathbb{R}$) to:

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0,$$

a nad $\mathbb{C}$:

$$[\lambda - (1 + i)]^2[\lambda - (1 - i)]^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Mamy więc: parę podwójnych zespolonych wartości własnych

$$\lambda_1 = (1 + i), \quad \lambda_2 = (1 - i), \quad n_1 = n_2 = 2$$

i odpowiadające im rozwiązanie

$$x(t) = e^t[(At + B)\sin(t) + (Ct + D)\cos(t)],$$

jedną pojedynczą rzeczywistą wartość własną $\lambda_3 = 2$, $n_3 = 1$ z rozwiązaniem

$$x(t) = Ee^{2t}$$

i jedną podwójną, rzeczywistą wartość własną $\lambda_4 = 3$, $n_4 = 2$ z rozwiązaniem

$$x(t) = (Ft + G)e^{3t}.$$

Ogólne rozwiązanie naszego równania siódmego stopnia ma więc postać

$$x(t) = e^t[(At + B)\sin(t) + (Ct + D)\cos(t)] + Ee^{2t} + (Ft + G)e^{3t}.$$

♣

W dalszym ciągu zajmiemy się poszukiwaniem szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego. Najefektywniejszą metodą poszukiwania tego rozwiązania jest zgadywanie. Znane są ogólne zasady przewidywania postaci rozwiązania w zależności od postaci niejednorodności. O tym powiemy za chwilę. Zdarza się jednak, że niejednorodność nie jest typowa, wtedy trzeba uciec się do metody uzmienniania stałych. Pamiętać jednak musimy, że metoda uzmienniania stałych została wymyślona dla równań rzędu pierwszego a nie rzędu drugiego i wyższych. Można ją zatem stosować po przejściu od równania rzędu wyższego do układu równań rzędu pierwszego. Omówimy to na przykładzie równania drugiego rzędu:

(8)
$$\frac{\mathsf{d}^2x}{\mathsf{d}t^2} + \alpha_1\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} + \alpha_0 x = b(t),$$

w innej notacji

$$\ddot{x} + \alpha_1\dot{x} + \alpha_0 x = b(t).$$

Wiadomo, że równanie jednorodne (RJ) ma dwa niezależne rozwiązania. Oznaczmy je x_1 i x_2. RORJ zapisać możemy w postaci

(9)
$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t).$$

Odpowiedni dla (8) układ równań to

(10)
$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest funkcja o wartościach wektorowych

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \\ C_1\dot{x}_1(t) + C_2\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Stałe uzmienniamy w rozwiązaniu (11) poszukując rozwiązania układu równań (10), a nie w rozwiązaniu (9) poszukując rozwiązania równania (8)! Traktujemy jak zwykle stałe C_1 i C_2 jako funkcje $C_1(t)$ i $C_2(t)$. Rozwiązanie układu równań (10) przewidujemy w postaci

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \\ C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Po zróżniczkowaniu

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix} C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \\ C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) \\ \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) \\ C_1(t)\ddot{x}_1(t) + C_2(t)\ddot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

wstawiamy do równania:

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) \\ \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) \\ C_1(t)\ddot{x}_1(t) + C_2(t)\ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \\ C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Części niebieskie upraszczają się, bo wektor złożony z x_1, x_2 i pochodnych jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Zostaje

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) \\ \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix},$$

co można zapisać następująco

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Macierz złożona z rozwiązań jest odwracalna, bo rozwiązania są niezależne. Otrzymujemy więc wzory na $\dot{C}_1$ i $\dot{C}_2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Przykład 2. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{1}{t}e^t.$$

Szukamy (RORJ): Równanie charakterystyczne ma postać

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Mamy jedną dwukrotną wartość własną $\lambda = 1$, zatem fundamentalny układ rozwiązań składa się z

$$x_1(t) = e^t \quad \text{i} \quad x_2(t) = te^t.$$

Zapisujemy (RORJ) zależne od dwóch dowolnych stałych

$$x_o = Ae^t + Bte^t.$$

Układ równań pierwszego rzędu odpowiadający równaniu drugiego rzędu ma postać

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Rozwiązaniem ogólnym układu jednorodnego jest wektor

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o(t) \\ \dot{x}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^t + Bte^t \\ Ae^t + B(e^t + te^t) \end{bmatrix}.$$

W powyższym wektorze traktujemy stałe A, B jako funkcje zmiennej t i wstawiamy do (13).

$$\dot{A}\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + \dot{B}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t + te^t \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} e^t + te^t \\ 2e^t + te^t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\left(A\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} te^t \\ e^t + te^t \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}$$

Wyrazy niebieskie i czerwone (wraz z macierzą) upraszczają się, bo wektory

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} te^t \\ e^t + te^t \end{bmatrix}$$

są rozwiązaniami układu jednorodnego. Pozostaje równanie na pochodne $\dot{A}$ i $\dot{B}$

$$\dot{A}\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + \dot{B}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t + te^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix},$$

które inaczej można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy $\dot{A}$ i $\dot{B}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+t & -t \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

i szukamy funkcji pierwotnych:

$$A = \int (-1)\mathsf{d}t = -t + const, \qquad B = \int \frac{1}{t}\,\mathsf{d}t = \log|t| + const.$$

Otrzymujemy następujące rozwiązanie szczególne:

$$x_s = (-t)e^t + \log|t|te^t.$$

Pierwszy składnik jest proporcjonalny do jednego z rozwiązań fundamentalnych, można więc go pominąć. Ostatecznie (RORN) jest postaci

$$x(t) = Ae^t + Bte^t + t\log(|t|)e^t.$$

♣

Metodę zgadywania omówimy na następującym przykładzie

Przykład 3. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - x = 2t\cos t + e^t.$$

Powyższe równanie jest równaniem liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach z dwiema niejednorodnościami (niejednorodnością, która jest sumą dwóch wyrazów). W takiej sytuacji rozwiązanie szczególne jest sumą odpowiednich rozwiązań otrzymanych oddzielnie dla każdego wyrazu. Zaczynamy jak zwykle od (RORJ). Równanie charkterystyczne

$$0 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

ma dwa pierwiastki $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Fundamentalny układ rozwiązań to

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = e^{-t}.$$

(RORJ) ma postać

$$x_o(t) = Ae^t + Be^{-t}.$$

Nie będziemy teraz uzmienniać stałych A i B, tylko spróbujemy odgadnąć postać rozwiązania szczególnego. Zaczynamy od pierwszej niejednorodności, tzn $b_1(t) = 2t\cos t$. Wśród rozwiązań RJ nie ma funkcji $t \mapsto \cos t$, ani $t \mapsto \sin t$, tzn niejednorodność jest *nierezonansowa.* Rozwiązanie szczególne przewidujemy w postaci podobnej do niejednorodności, czyli

$$x_s(t) = (at + b)\cos t + (ct + d)\sin t.$$

Różniczkujemy przewidywane x_s dwa razy

$$\dot{x}_s(t) = (a + d + ct)\cos t + (-at - b + c)\sin t,$$

$$\ddot{x}_s(t) = (-at + -b + 2c)\cos t + (-2a - d - ct)\sin t$$

i wstawiamy do równania z niejednorodnością $b_1(t)$:

$$\begin{aligned}(-at + -b + 2c)\cos t + (-2a - d - ct)\sin t - [(at + b)\cos t + (ct + d)\sin t] &= 2t\cos t\\ (-2at - 2b + 2c)\cos t + (-2ct - 2a - 2d)\sin t &= 2t\cos t\end{aligned}$$

Z porównania prawej i lewej strony wynikają warunki na a, b, c, d:

$$\begin{aligned}-2a &= 2\\ -2b + 2c &= 0\\ 2c &= 0\\ -2a - 2d &= 0\end{aligned}$$

Z powyższych równań otrzymujemy

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1,$$

tzn

$$x_s(t) = -t\cos t + \sin t.$$

Druga niejednorodność $b_2(t) = e^t$ jest także typowa (funkcja wykładnicza). Ponieważ jest to jednocześnie rozwiązanie RJ, mamy do czynienia z tzw *rezonansem.* Nazwa pochodzi z analizy równania oscylatora harmonicznego. Jeśli siła wymuszająca drgania oscylatora ma tę samą częstotliwość co częstotliwość własna oscylatora (tzn. jest proporcjonalna do jednego z rozwiązań równania oscylatora harmonicznego) mamy do czynienia właśnie z rezonansem, którego objawem jest wzrastanie amplitudy drgań. W takim przypadku przewidywana postać rozwiązania szczególnego powinna być następująca:

$$x_s(t) = ate^t,$$

tzn. stopień wielomianu mnożącego e^t (w samej niejednorodności równy 0) powinien zostać zwiększony. W celu wyznaczenia wartości parametrów a i b wstawiamy przewidywaną postać x_s do równania z niejednorodnością $b_2(t)$:

$$\dot{x}_s(t) = (at + a)e^t, \qquad \ddot{x}_s(t) = (at + 2a)e^t$$

$$(at + 2a)e^t - ate^t = e^t \quad \Rightarrow \quad 2ae^t = e^t$$

Otrzymaliśmy wartość $a = \frac{1}{2}$ tzn. $x_s(t) = \frac{1}{2}te^t$. Pełne rozwiązanie równania z obydwoma niejednorodnościami to

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t} - t\cos t + \sin t + \frac{1}{2}te^t.$$

Więcej informacji na temat zgadywania rozwiązań szczególnych dla typowych niejednorodności będzie na ćwiczeniach. ♣