

Drgania i fale

Piotr Niezurawski

Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl

Spis treści

1	Drgania	2
1.1	Ciężarek na sprężynie – oscylator harmoniczny prosty	2
1.1.1	Równanie ruchu	2
1.1.2	Częstość, okres i częstotliwość	3
1.1.3	Energia w ruchu harmonicznym i zasada zachowania energii	3
1.1.4	Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia	5
1.1.5	Przykład: Ciężarek na sprężynie	5
1.1.6	Liczby zespolone w opisie drgań	6
1.1.7	Składanie drgań harmoniczných	7
2	Fale	8
2.1	Równanie falowe 1D dla struny	8
2.1.1	Ogólne rozwiązanie równania falowego	8
2.1.2	Przykład: Sprawdzenie funkcji	8
2.2	Struna unieruchomiona na obu końcach – fale stojące	9
2.2.1	Wyprowadzenie postaci fal stojących z warunków brzegowych	9
2.2.2	Baza modów własnych i zasada superpozycji	11
2.2.3	Składanie harmoniczných na strunie	12

1 Drgania

Drgania (oscylacje) to ruchy lub zmiany stanu, które powtarzają się w czasie wokół pewnego położenia równowagi lub wartości średniej.

Szczególnym przypadkiem drgań są drgania harmoniczne, czyli zachodzące pod wpływem siły zwracającej, proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi. Wtedy dla ruchu jednowymiarowego zależność wychylenia ciała z położenia równowagi od czasu jest krzywą harmoniczną (czyli sinusoidą). Najprostszym modelem, w którym występuje ruch harmoniczny, jest ciężarek połączony ze sprężyną.

1.1 Ciężarek na sprężynie – oscylator harmoniczny prosty

Ciężarek o masie m jest przymocowany do końca nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości k . Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony. Ciężarek może poruszać się bez tarcia, po prostej X będącej osią sprężyny – ruch jest jednowymiarowy. Położenie równowagi ciężarka przyjmujemy jako $x = 0$. Wychylenie jest więc równe x . Symbole v , a i F oznaczają współrzędne wzdłuż osi X odpowiednio prędkości, przyspieszenia i siły (nie są to wartości tych wektorów).

1.1.1 Równanie ruchu

Gdy ciężarek zostanie wychylony z położenia równowagi na odległość x , sprężyna działa na niego siłą sprężystości o współrzędnej $F = -kx$ (prawo Hooke’a). Siła jest zawsze zwrócona przeciwnie do wychylenia, czyli w stronę położenia równowagi (znak minus). Z drugiej zasady dynamiki:

$$\begin{aligned} ma &= F \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \end{aligned}$$

Stąd:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Po oznaczeniu $\omega^2 = \frac{k}{m}$, gdzie ω nazywamy **częstością**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

gdzie występują następujące stałe:

- A – amplituda drgań (maksymalne wychylenie z położenia równowagi),
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość, wyrażana w rad/s, czyli 1/s,
- ϕ – faza początkowa (kąt dla $t = 0$).

Stałe A oraz ϕ są zależne od warunków początkowych, np. położenia i prędkości w chwili $t = 0$.

Oczywiście ogólne rozwiązanie można zapisać w innej postaci, np.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

i dobrać odpowiednie stałe. Przy przejściu od $\sin()$ do $\cos()$ zmieni się tylko ϕ .

1.1.2 Częstość, okres i częstotliwość

- **Częstość** $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Określa, jak szybko zmienia się faza drgań (kąt, argument sinusa).
- **Okres** T : Czas potrzebny na wykonanie jednego pełnego drgania (cyklu). Ponieważ funkcja sinus ma okres 2π , to $\omega T = 2\pi$, skąd:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- **Częstotliwość** f : Liczba pełnych drgań (cykli) wykonanych w jednostce czasu. Jest odwrotnością okresu:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jednostką częstotliwości jest herc (Hz), gdzie $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

1.1.3 Energia w ruchu harmonicznym i zasada zachowania energii

Prędkość ciężarka $v(t) = \frac{dx}{dt}$.

Przyśpieszenie $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Równanie ruchu: $m \frac{dv}{dt} = -kx$.

Wyprowadzenie zasady zachowania energii – sposób 1 (całkowanie po dx)

Całkujemy obie strony równania $m \frac{dv}{dt} = -kx$ po x od stanu początkowego (1) do końcowego (2):

$$\int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

Ponieważ $v = \frac{dx}{dt}$, to $dx = v dt$, więc:

$$m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} v dt = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

Otrzymujemy:

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_1}^{v_2} = \left[-\frac{1}{2} k x^2 \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{1}{2} k x_2^2 - \left(-\frac{1}{2} k x_1^2 \right)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Przenosząc wyrazy z danym indeksem na jedną stronę:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Czyli wielkość obliczona w stanie 1 (prawa strona) jest równa tej wielkości w dowolnej chwili 2 (lewa strona). Wobec tego mamy stałą ruchu:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

Definiując energię kinetyczną $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ oraz energię potencjalną sprężystości $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, otrzymujemy:

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$$

Oznacza to, że całkowita energia mechaniczna $E = E_k + E_p$ jest zachowana:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

Wyprowadzenie zasady zachowania energii – sposób 2 (mnożenie przez v)

Mnożymy obie strony równania ruchu $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ przez $v = \frac{dx}{dt}$:

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \frac{dx}{dt} \\ m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}m \cdot 2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) = \frac{1}{2}k \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt} = kx \frac{dx}{dt}$$

Podstawiając te zależności do przekształconego równania ruchu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Pochodna sumy energii kinetycznej i potencjalnej po czasie jest równa zero. Oznacza to, że ta suma jest stała w czasie:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

Jeśli $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ i $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$, to:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m(A\omega \cos(\omega t + \phi))^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k(A \sin(\omega t + \phi))^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) = \frac{1}{2}kA^2$$

1.1.4 Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia

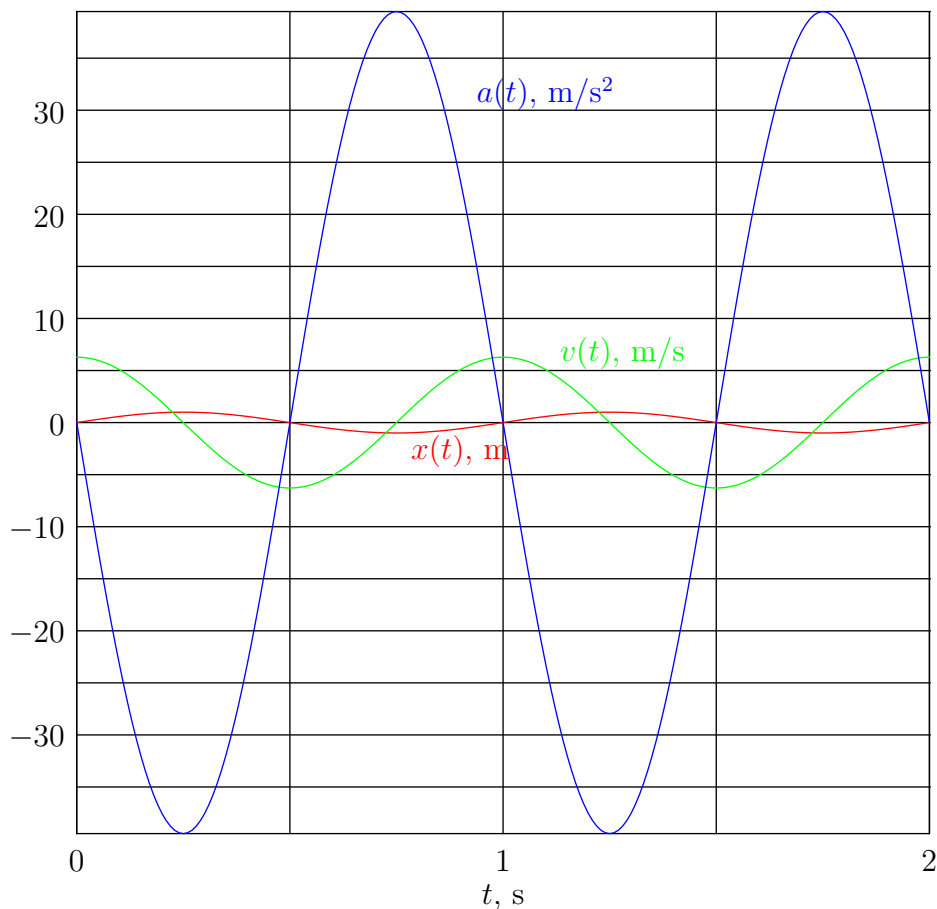
Założmy dla przykładu, że $A = 1$ m, $\omega = 2\pi$ rad/s (czyli $T = 1$ s), $\phi = 0$. Wtedy:

$$x(t) = (1 \text{ m}) \sin(2\pi t / (1 \text{ s}))$$

$$v(t) = (1 \text{ m/s}) 2\pi \cos(2\pi t / (1 \text{ s}))$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t) = -(1 \text{ m/s}^2)(2\pi)^2 \sin(2\pi t / (1 \text{ s}))$$

Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia dla tego przypadku:



1.1.5 Przykład: Ciężarek na sprężynie

Ciężarek o masie $m = 0,5$ kg przymocowano do nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości $k = 200$ N/m. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony. Ciężarek może poruszać się bez tarcia, po prostej X będącej osią sprężyny – ruch jest jednowymiarowy. Położenie równowagi ciężarka przyjmujemy jako $x = 0$. W chwili $t = 0$ ciężarek znajduje się w położeniu $x_0 = 0,1$ m i ma prędkość $v_0 = 1$ m/s. Oblicz: a) Częstotliwość ω , okres T i częstotliwość f drgań. b) Amplitudę A i fazę początkową ϕ . c) Zapisz równanie ruchu $x(t)$.

Rozwiązanie: a) Częstotliwość: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N/m}}{0,5 \text{ kg}}} = \sqrt{400 \text{ s}^{-2}} = 20 \text{ rad/s}$. Okres: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20 \text{ rad/s}} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \approx 0,314 \text{ s}$. Częstotliwość: $f = \frac{1}{T} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz} \approx 3,18 \text{ Hz}$.

b) Równanie ruchu: $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. Prędkość: $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$. Warunki początkowe:

$$x(0) = x_0 = A \sin(\phi) = 0,1 \text{ m}$$

$$v(0) = v_0 = A\omega \cos(\phi) = 1 \text{ m/s}$$

Czyli: $\sin(\phi) = \frac{x_0}{A}$ oraz $\cos(\phi) = \frac{v_0}{A\omega}$.

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając stronami ($\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$):

$$1 = \left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{A\omega}\right)^2 = \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2\omega^2}$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0,1 \text{ m})^2 + \frac{(1 \text{ m/s})^2}{(20 \text{ rad/s})^2}} = \sqrt{0,01 \text{ m}^2 + \frac{1 \text{ m}^2/\text{s}^2}{400 \text{ s}^{-2}}} = \sqrt{0,01 \text{ m}^2 + 0,0025 \text{ m}^2} = \sqrt{0,0125 \text{ m}^2} \approx 0,1118 \text{ m}.$$

Amplituda $A \approx 0,112 \text{ m}$.

Faza początkowa:

$$\sin(\phi) = \frac{x_0}{A} = \frac{0,1 \text{ m}}{0,1118 \text{ m}} \approx 0,8944$$

$$\cos(\phi) = \frac{v_0}{A\omega} = \frac{1 \text{ m/s}}{0,1118 \text{ m} \cdot 20 \text{ rad/s}} = \frac{1}{2,236} \approx 0,4472$$

Ponieważ $\sin(\phi) > 0$ i $\cos(\phi) > 0$, kąt ϕ leży w I ćwiartce.

$$\phi = \text{atan2}(0,8944; 0,4472) \approx 1,107 \text{ rad} \approx 63,43^\circ.$$

c) Równanie ruchu:

$$x(t) \approx (0,112 \text{ m}) \cos((20/\text{s})t - 1,107)$$

1.1.6 Liczby zespolone w opisie drgań

Opis drgań można uprościć, stosując liczby zespolone. Kluczowa jest tu **tożsamość Eulera**:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną. Drganie harmoniczne $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ można przedstawić jako część rzeczywistą liczby zespolonej:

$$x(t) = \text{Re}(\tilde{x}(t))$$

gdzie $\tilde{x}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t}$, a $\tilde{A} = Ae^{i\phi}$ jest amplitudą zespoloną. $\tilde{x}(t) = Ae^{i\phi}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \phi)} = A(\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi))$. Wtedy $\text{Re}(\tilde{x}(t)) = A \cos(\omega t + \phi)$, co zgadza się z naszym rozwiązaniem.

Zaletą tego podejścia jest łatwość różniczkowania funkcji wykładniczej:

$$\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt} = i\omega \tilde{A}e^{i\omega t} = i\omega \tilde{x}(t)$$

$$\tilde{a}(t) = \frac{d\tilde{v}}{dt} = (i\omega)^2 \tilde{A}e^{i\omega t} = -\omega^2 \tilde{x}(t)$$

Części rzeczywiste tych wyrażeń dają odpowiednio $v(t)$ i $a(t)$.

1.1.7 Składanie drgań harmoniczych

Rozważmy sumę pięciu drgań harmoniczych o tej samej częstotliwości ω_0 , ale różnych amplitudach A_n i fazach początkowych ϕ_n :

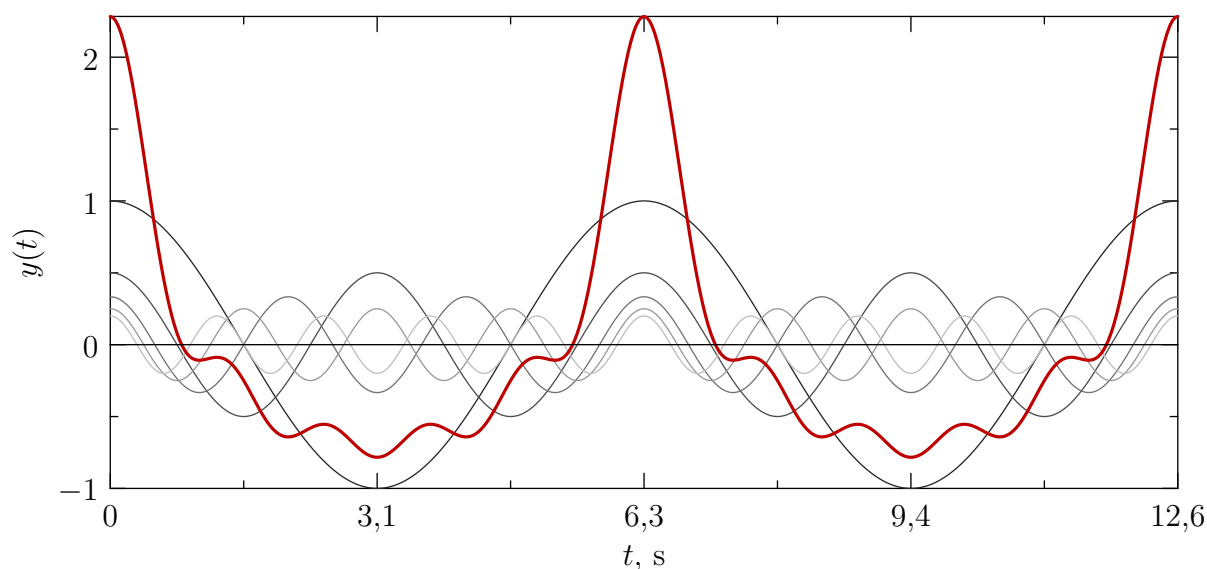
$$y(t) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos(\omega_0 t + \phi_n)$$

Wynikowe drganie $y(t)$ również będzie drganiem harmonicznym o częstotliwości ω_0 .

Jeśli częstotliwości składowe są różne, np. $\omega_n = n \cdot \omega_0$ (harmoniczne), wynikowe drganie będzie okresowe, ale niekoniecznie harmoniczne.

Poniżej przykład składania pięciu drgań harmoniczych o częstotliwościach będących kolejnymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej $\omega_0 = 1$ rad/s, amplitudach $A_n = 1/n$ i fazach $\phi_n = 0$.

$$y(t) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} \cos(nt)$$



Składanie pięciu drgań harmoniczych: $y(t) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} \cos(nt)$. Cienkie linie to składowe, gruba czerwona linia to suma.

2 Fale

Fala to zaburzenie rozchodzące się w ośrodku lub przestrzeni, przenoszące energię bez przenoszenia materii na duże odległości.

2.1 Równanie falowe 1D dla struny

Rozważmy drgania poprzeczne cienkiej, napiętej struny. Niech $y(x, t)$ oznacza wychylenie pionowe struny w punkcie x w chwili t . Zakładamy małe wychylenia. Równanie falowe dla takiej struny ma postać:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gdzie v jest prędkością rozchodzenia się fali w strunie. Prędkość ta zależy od naprężenia struny F_N i jej gęstości liniowej μ (masa na jednostkę długości):

$$v = \sqrt{\frac{F_N}{\mu}}$$

2.1.1 Ogólne rozwiązanie równania falowego

Ogólne rozwiązanie równania falowego 1D (rozwiązanie d'Alemberta) można zapisać jako:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

gdzie f i g są dowolnymi dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami.

- Składowik $f(x - vt)$ opisuje falę biegnącą w dodatnim kierunku osi x (w prawo) z prędkością v . Kształt tej fali, określony przez funkcję f , nie zmienia się, a jedynie przesuwa.
- Składowik $g(x + vt)$ opisuje falę biegnącą w ujemnym kierunku osi x (w lewo) z prędkością v .

Szczególnym przypadkiem są **fale harmoniczne**, np. $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$, gdzie

$$k = 2\pi/\lambda$$

to liczba falowa (wektor falowy – tutaj 1D, więc jest to jedna współrzędna), a λ to długość fali. Prędkość fali $v = \omega/k$.

2.1.2 Przykład: Sprawdzenie funkcji

Sprawdź, czy funkcja $y(x, t) = A \sin(k(x - vt))$ spełnia równanie falowe.

Rozwiązanie: Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A \cos(k(x - vt)) \cdot (-kv) = -Akv \cos(k(x - vt))$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Akv(-\sin(k(x - vt))) \cdot (-kv) = -A(kv)^2 \sin(k(x - vt)) = -Ak^2 v^2 \sin(k(x - vt))$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \cos(k(x - vt)) \cdot k = Ak \cos(k(x - vt))$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Ak(-\sin(k(x-vt))) \cdot k = -Ak^2 \sin(k(x-vt))$$

Podstawiamy do równania falowego

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}:$$

$$-Ak^2 v^2 \sin(k(x-vt)) = v^2(-Ak^2 \sin(k(x-vt)))$$

$$-Ak^2 v^2 \sin(k(x-vt)) = -Ak^2 v^2 \sin(k(x-vt))$$

Tożsamość jest spełniona, więc funkcja jest rozwiązaniem równania falowego.

Zrób to samo, korzystając z zapisu: $y(x,t) = Ae^{ik(x-vt)}$.

2.2 Struna unieruchomiona na obu końcach – fale stojące

Rozważmy strunę o długości L unieruchomioną na obu końcach, tj.

$$y(0,t) = 0 \quad y(L,t) = 0$$

dla każdego t .

W wyniku interferencji (dodawania się) fal biegnących w przeciwnych kierunkach (fali padającej i odbitej od końców struny) mogą powstać **fale stojące**. Rozwiązania równania falowego spełniające te warunki brzegowe mają postać (wyprowadzenie w następnym podrozdziale):

$$y_n(x,t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Warunek $y(0,t) = 0$ jest automatycznie spełniony przez $\sin(k_n \cdot 0) = 0$. Warunek $y(L,t) = 0$ wymaga, aby $\sin(k_n L) = 0$. To jest spełnione, gdy $k_n L = n\pi$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Stąd dozwolone wartości liczby falowej (mody własne):

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Odpowiadające im długości fal: $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$. Częstości: $\omega_n = vk_n = v\frac{n\pi}{L}$. Częstotliwości drgań własnych (harmoniczne): $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nv}{2L} = nf_1$, gdzie $f_1 = \frac{v}{2L}$ jest **częstotliwością podstawową** (pierwsza harmoniczna, $n = 1$). Funkcje $\sin(k_n x)$ tworzą bazę rozwiązań. Oznacza to, że dowolny kształt drgającej struny (spełniający warunki brzegowe) można przedstawić jako superpozycję (sumę) tych modów własnych:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Amplitudy A_n i fazy ϕ_n zależą od sposobu pobudzenia struny.

2.2.1 Wyprowadzenie postaci fal stojących z warunków brzegowych

Rozpocniemy od propozycji rozwiązania równania falowego, będącego superpozycją fal harmonicznich o częstości ω i liczbie falowej $k = \omega/v$, biegnących w lewo i w prawo. Aby zapewnić, że ostateczne rozwiązanie będzie rzeczywiste, uwzględnimy od razu cztery składniki zespolone:

$$\tilde{y}(x,t) = Ae^{i(kx+\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)} + Ce^{i(kx-\omega t)} + De^{-i(kx-\omega t)}$$

gdzie A, B, C, D to stałe zespolone. Fizyczne wychylenie $y(x, t)$ musi być funkcją rzeczywistą, co narzuca warunek $y(x, t) = y^*(x, t)$, gdzie y^* to sprzężenie zespolone.

$$y^*(x, t) = A^* e^{-i(kx + \omega t)} + B^* e^{i(kx + \omega t)} + C^* e^{-i(kx - \omega t)} + D^* e^{i(kx - \omega t)}$$

Porównując współczynniki przy tych samych funkcjach wykładniczych w y i y^* , otrzymujemy relacje między stałymi:

$$B = A^* \quad \text{oraz} \quad D = C^*$$

Nasze ogólne rozwiązanie można zatem zapisać, grupując wyrazy ze względu na część przestrzenną $e^{\pm ikx}$:

$$y(x, t) = e^{ikx}(Ae^{i\omega t} + Ce^{-i\omega t}) + e^{-ikx}(A^*e^{-i\omega t} + C^*e^{i\omega t})$$

Teraz nałożymy warunki brzegowe.

Warunek 1: $y(0, t) = 0$ Podstawiając $x = 0$, wychylenie musi być równe zero dla każdej chwili t :

$$y(0, t) = (Ae^{i\omega t} + Ce^{-i\omega t}) + (A^*e^{-i\omega t} + C^*e^{i\omega t}) = 0$$

Grupujemy wyrazy ze względu na część czasową $e^{\pm i\omega t}$:

$$(A + C^*)e^{i\omega t} + (C + A^*)e^{-i\omega t} = 0$$

Ponieważ funkcje $e^{i\omega t}$ i $e^{-i\omega t}$ są liniowo niezależne, powyższa równość może być spełniona dla wszystkich t tylko wtedy, gdy oba współczynniki w nawiasach są równe zero:

$$A + C^* = 0 \implies A = -C^*$$

Druga równość, $C + A^* = 0$, jest po prostu sprzężeniem zespolonym pierwszej i nie wnosi nowej informacji. Otrzymaliśmy kluczową relację między amplitudami fal biegnących w lewo (A, C^*) i w prawo (C, A^*) .

Podstawmy $A = -C^*$ do wyrażenia na $y(x, t)$:

$$y(x, t) = e^{ikx}(-C^*e^{i\omega t} + Ce^{-i\omega t}) + e^{-ikx}(-Ce^{-i\omega t} + C^*e^{i\omega t})$$

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias, zauważamy, że:

$$y(x, t) = (-C^*e^{i\omega t} + Ce^{-i\omega t})e^{ikx} - (-C^*e^{i\omega t} + Ce^{-i\omega t})e^{-ikx}$$

$$y(x, t) = (Ce^{-i\omega t} - C^*e^{i\omega t})(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

Korzystając z tożsamości Eulera $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin(\alpha)$, otrzymujemy:

$$y(x, t) = (Ce^{-i\omega t} - C^*e^{i\omega t}) \cdot 2i \sin(kx)$$

Warunek 2: $y(L, t) = 0$ Drugi warunek brzegowy wymaga, aby wychylenie w punkcie $x = L$ było zerowe:

$$y(L, t) = (Ce^{-i\omega t} - C^*e^{i\omega t}) \cdot 2i \sin(kL) = 0$$

Aby rozwiązanie było nietrywialne (tzn. $C \neq 0$, co implikuje, że część czasowa nie jest tożsamościowo zerem), musi być spełniony warunek na część przestrzenną:

$$\sin(kL) = 0$$

Jest to możliwe tylko dla dyskretnego zbioru wartości liczby falowej k_n , które spełniają:

$$k_n L = n\pi, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Stąd dozwolone liczby falowe (mody własne) to $k_n = \frac{n\pi}{L}$. Każdej z nich odpowiada częstota drgań $\omega_n = vk_n$.

Ostateczna postać rozwiązania Dla danego modu n , nasze rozwiązanie ma postać:

$$y_n(x, t) = (C_n e^{-i\omega_n t} - C_n^* e^{i\omega_n t}) \cdot 2i \sin(k_n x)$$

Aby pokazać, że jest tożsama z formą $A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, zapiszmy stałą zespoloną C_n w postaci wykładniczej $C_n = |C_n| e^{i\theta_n}$. Część czasowa staje się wtedy:

$$C_n e^{-i\omega_n t} - C_n^* e^{i\omega_n t} = |C_n| e^{i(\theta_n - \omega_n t)} - |C_n| e^{-i(\theta_n - \omega_n t)} = 2i|C_n| \sin(\theta_n - \omega_n t)$$

Podstawiając to z powrotem do wyrażenia na $y_n(x, t)$:

$$y_n(x, t) = 2i|C_n| \sin(\theta_n - \omega_n t) \cdot 2i \sin(k_n x) = -4|C_n| \sin(k_n x) \sin(\theta_n - \omega_n t)$$

Używając tożsamości $\sin(-z) = -\sin(z)$, możemy zapisać:

$$y_n(x, t) = 4|C_n| \sin(k_n x) \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

Na koniec, korzystając z relacji $\sin(z) = \cos(z - \pi/2)$, możemy przekształcić to do docelowej postaci:

$$y_n(x, t) = 4|C_n| \sin(k_n x) \cos(\omega_n t - \theta_n - \pi/2)$$

Definiując nową amplitudę rzeczywistą $A_n = 4|C_n|$ oraz nową fazę początkową $\phi_n = -\theta_n - \pi/2$, otrzymujemy ostatecznie:

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

co jest dokładnie postacią fali stojącej, którą chcieliśmy uzyskać. Wyprowadzenie pokazało, że fala stojąca na strunie unieruchomionej na obu końcach jest naturalną konsekwencją interferencji (dodawania się) fal biegnących w przeciwnych kierunkach z amplitudami i fazami dobranymi tak, aby spełnić warunki brzegowe.

2.2.2 Baza modów własnych i zasada superpozycji

Funkcje przestrzenne $\psi_n(x) = \sin(k_n x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, opisujące kształty poszczególnych modów własnych, tworzą **bazę funkcyjną** dla funkcji określonych na przedziale $[0, L]$ i zerujących się na jego końcach. Oznacza to dwie kluczowe rzeczy:

1. **Ortogonalność:** Dowolne dwa różne mody są do siebie ortogonalne („prostopadłe”). Matematycznie wyraża się to warunkiem:

$$\int_0^L \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

gdzie δ_{nm} to delta Kroneckera (wynosi 1, gdy $n = m$, i 0, gdy $n \neq m$). Ta właściwość jest niezwykle użyteczna przy wyznaczaniu współczynników rozwinięcia.

2. **Kompletność (zupełność):** Dowolny, „dobrze zachowujący się” kształt początkowy struny $y(x, 0) = f(x)$, który spełnia warunki brzegowe $f(0) = f(L) = 0$, można jednoznacznie przedstawić jako nieskończoną sumę (superpozycję) modów własnych. Jest to istota **szeregów Fouriera**.

Dzięki tym właściwościom, a także liniowości równania falowego, ogólne rozwiązanie dla drgającej struny unieruchomionej na obu końcach można zapisać jako sumę (superpozycję) wszystkich możliwych fal stojących:

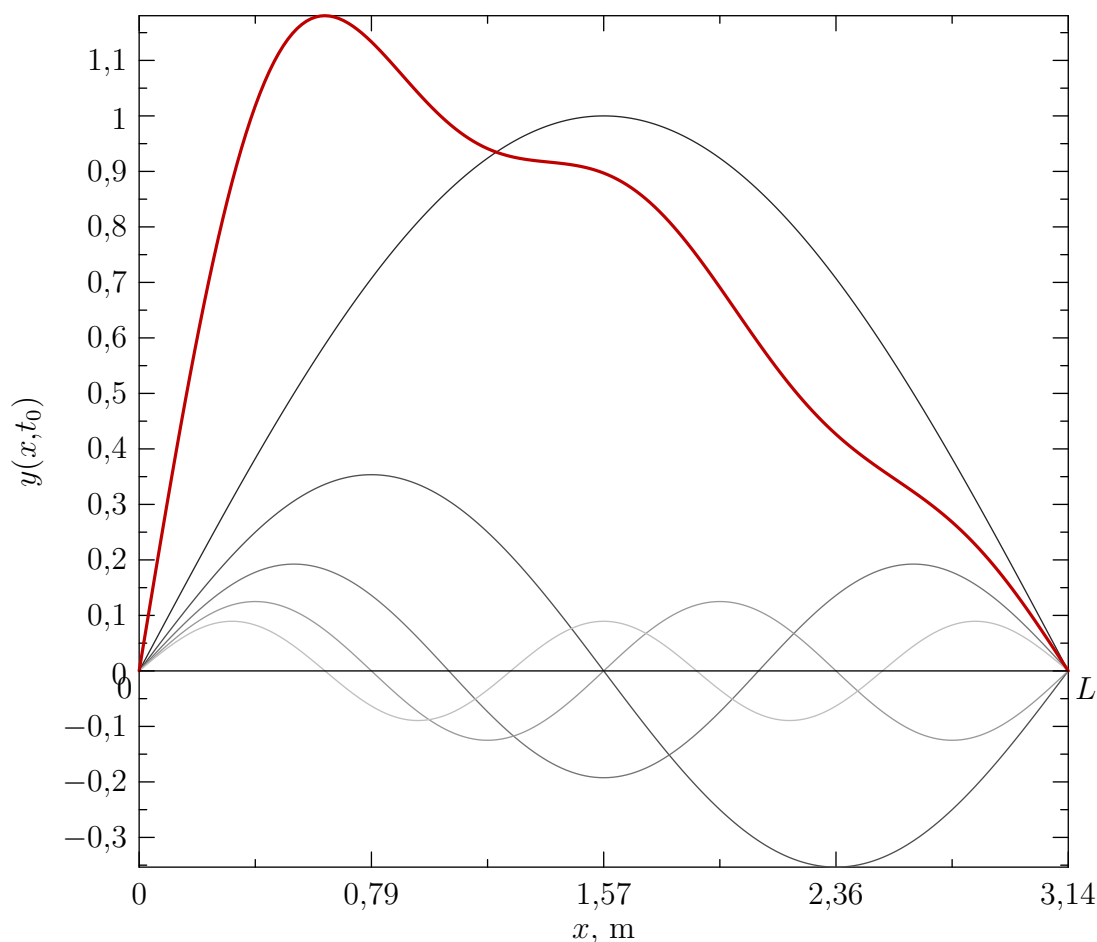
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Stałe A_n (amplitudy) i ϕ_n (fazy początkowe) dla każdego modu są wyznaczane przez warunki początkowe, czyli kształt $y(x,0)$ i prędkość $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ struny w chwili $t = 0$. Dzięki ortogonalności bazy, współczynniki te można obliczyć za pomocą całek z funkcji opisujących warunki początkowe.

2.2.3 Składanie harmoniczných na strunie

Poniżej przedstawiono kształt struny w chwili t_0 (przyjmijmy $\cos(\omega_n t_0 + \phi_n) = 1$ dla uproszczenia) będący superpozycją pierwszych pięciu harmoniczných. Amplitudy A_n wybrano tak, aby $A_n = \frac{1}{n^p}$. Dla $p = 1$ uzyskujemy przybliżenie fali piłokształtnej, dla $p = 2$ bardziej gładką krzywą. Wybierzmy $p = 1,5$ dla ciekawszego kształtu.

$$y(x, t_0) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^{1,5}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



Kształt struny unieruchomionej na końcach (0 i $L = \pi$ m) jako superpozycja pierwszych pięciu harmoniczných: $y(x, t_0) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^{1,5}} \sin(n\pi x/L)$. Cienkie linie to składowe harmoniczne, gruba czerwona linia to ich suma.