Fizyka elementarna - Zadania domowe. Części 1 i 2.

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski (24.09.2008)

Zadanie 1. Nominalne oprocentowanie lokaty bankowej w skali roku wynosi p. Oznacza to, że gdyby kapitalizacja nastąpiła po roku, kwota zwiększyłaby się $(1+p)$ razy. Ale kapitalizacja odsetek następuje na koniec każdego miesiąca (oprocentowanie bank dzieli wtedy po równo – na każdy miesiąc przypada $p/12$). Oblicz efektywne oprocentowanie lokaty po 1 roku. Uzyskaj również wynik liczbowy, jeśli $p = 6\%$.
Dla zainteresowanych: Uzyskaj wynik przy codziennej kapitalizacji. Oblicz $e^{6\%}$.

Rozwiązanie

Oprocentowanie w skali miesiąca jest równe

$$p/12$$

Jeśli na początku mamy na lokacie kwotę m_0, to po pierwszym miesiącu na lokacie jest

$$m_1 = m_0(1 + \frac{p}{12})$$

Po roku

$$m_{12} = m_0(1 + \frac{p}{12})^{12}$$

Czyli efektywne oprocentowanie wynosi

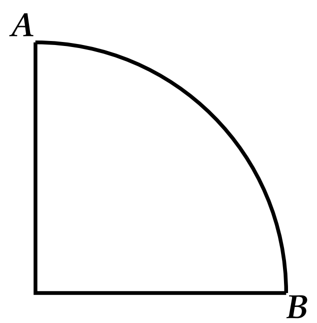
$$(1 + \frac{p}{12})^{12} - 1$$

Jeśli $p = 6\%$, to

$$(1 + \frac{p}{12})^{12} - 1 = 1,005^{12} - 1 \approx 1.0617 - 1 = 6,17\%$$

Zadanie 2. Ze stropu groty zaczęły spadać krople wody, uderzając w lustro podziemnego jeziora. Odstęp czasu między pierwszym a drugim uderzeniem wynosił $\Delta t_1 = 0,1$ s. Odstęp czasu między drugim a trzecim uderzeniem był równy $\Delta t_2 = 2\,\Delta t_1 = 0,2$ s. Ogólnie: odstęp czasu między uderzeniami o indeksie k oraz $k+1$ był równy $\Delta t_k = 2^{k-1}\,\Delta t_1$. Ile uderzeń usłyszał grotołaz w czasie $T = 100$ s od pierwszego uderzenia?

Zadanie 3. Biedronka porusza się ze stałą prędkością $v = 2$ cm/s po fragmencie kolistej tarczy. Fragment ten uzyskano, rozcinając całą tarczę na 4 identyczne części (jest to wycinek kołowy o kącie środkowym $90°$). Tarcza miała promień $r = 10$ cm. Ile czasu potrzebuje biedronka na przejście między punktami A i B (rysunek), jeśli:
a) może poruszać się tylko po łuku o promieniu r?
b) może poruszać się po prostej łączącej punkty A i B?



Zadanie 4. Mucha wystartowała z szyby samochodu w momencie, gdy znajdowała się w odległości $L = 10$ m od ściany domu. Samochód zaczął się wtedy poruszać i szyba zbliża się do ściany z prędkością $v = 3,6$ km/h. Oszalała mucha lata tam i z powrotem między szybą a ścianą z prędkością $u = 4$ m/s; owad porusza się zawsze po prostej prostopadłej do ściany i przechodzącej przez punkt startu na szybie. Oblicz, ile czasu mija między kolejnymi pobytami muchy przy szybie.

Rozwiązanie

Oznaczenie:
Δt_k – czas między pobytem przy szybie o indeksie k (startem w przypadku $k = 1$) a pobytem o indeksie $k + 1$

Zaczynamy od prostego przypadku. Czas między startem ($k = 1$, pierwszy pobyt przy szybie) i drugim pobytem przy szybie obliczam z równania: (droga muchy) = 2 * (odległość szyby) - (droga szyby)

$$\Delta t_1 u = 2L - \Delta t_1 v$$

Otrzymuję:

$$\Delta t_1 = \frac{2L}{u + v}$$

Czas między pobytem drugim i trzecim:

$$\Delta t_2 u = 2(L - \Delta t_1 v) - \Delta t_2 v$$

Między trzecim i czwartym:

$$\Delta t_3 u = 2[L - (\Delta t_1 + \Delta t_2)v] - \Delta t_2 v$$

Ogólnie:

$$\Delta t_{k+1} u = 2[L - (\Delta t_1 + ... + \Delta t_k)v] - \Delta t_{k+1} v$$

Mamy wzór rekurencyjny:

$$\Delta t_{k+1} = 2[L - (\Delta t_1 + ... + \Delta t_k)v]/(u + v)$$

Równanie ma postać:

$$\Delta t_{k+1} = A + B(\Delta t_1 + ... + \Delta t_k)$$

gdzie $A \equiv 2L/(u + v)$ oraz $B \equiv -2v/(u + v)$.

Obliczając kolejne interwały, możemy podać rozwiązanie.

Dla podanych wartości:

$$\begin{aligned} A &= 4 \text{ s} \\ B &= -2/5 = -0,4 \end{aligned}$$

Kilka pierwszych wyników:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= 4 \text{ s} \\ \Delta t_2 &= 4 \text{ s} - 1,6 \text{ s} = 2,4 \text{ s} \\ \Delta t_3 &= 4 \text{ s} - 0,4 \cdot 6,4 \text{ s} = 1,44 \text{ s} \end{aligned}$$

Uzyskajmy postać zwartą. Oto kilka pierwszych wyników symbolicznych:

$$\begin{aligned}
\Delta t_1 &= A \\
\Delta t_2 &= A + BA = A(1+B) \\
\Delta t_3 &= A + B(A + A(1+B)) = A(1+B)^2
\end{aligned}$$

Sugeruje to rozwiązanie postaci:

$$\Delta t_k = A(1+B)^{k-1}$$

Można sprawdzić, że równanie rekurencyjne jest spełnione!

Do tego wyniku można też dojść w następujący sposób. Uzyskanemu równaniu rekurencyjnemu przypatrujemy się w dwóch odsłonach:

$$\begin{aligned}
\Delta t_k &= A + B(\Delta t_1 + ... + \Delta t_{k-1}) \\
\Delta t_{k-1} &= A + B(\Delta t_1 + ... + \Delta t_{k-2})
\end{aligned}$$

Z drugiego równania otrzymujemy:

$$\Delta t_1 + ... + \Delta t_{k-2} = (\Delta t_{k-1} - A)/B$$

Wstawiamy ten wynik do pierwszego równania:

$$\Delta t_k = A + B[(\Delta t_{k-1} - A)/B + \Delta t_{k-1}]$$

I mamy znacznie prostsze równanie rekurencyjne

$$\Delta t_k = \Delta t_{k-1}(1+B) \ ,$$

które przy $\Delta t_1 = A$ prowadzi do postaci zwartej:

$$\Delta t_k = A(1+B)^{k-1}$$

Zadania ze zbiorów

B. Fabiański, Z. Paczkowski „*Zbiór zadań z fizyki dla maturzystów i kandydatów na studia*"

Roz.1 A

Zadanie 1

Wioślarz płynie łodzią w górę rzeki. Gdy przepływał pod mostem, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po czasie t = 0,5 h wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził zgubione koło w odległości s = 5 km od mostu. Obliczyć prędkość prądu rzeki, jeżeli wioślarz płynąc w górę rzeki wiosłował z jednakowym wysiłkiem.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez:

t_1 - czas ruchu koła ratunkowego i zarazem czas całkowity ruchu wioślarza,

t_2 - czas ruchu wioślarza z prądem rzeki,

t - czas ruchu wioślarza w górę rzeki.

Prędkość wioślarza względem brzegów rzeki wyraża się jako:

$v_g=v_w-v_r$ (w górę rzeki)

$v_d=v_w+v_r$ (w dół rzeki)

gdzie v_w jest prędkością wioślarza względem wody stojącej, v_r-prędkością prądu rzeki.

Droga przebyta przez koło ratunkowe z prądem rzeki wynosi $s=v_r t_1$,

a drogi przebyte przez wioślarza w górę i w dół rzeki dane są zależnościami:

(1) $s_1=v_g t=(v_w-v_r)t$

(2) $s_1+s=v_d\ t_2=(v_w+v_r)t_2$

Zauważmy, że $t_1=t+t_2$

Do wzoru (2) podstawiamy zależność (1) i otrzymujemy:

$(v_w-v_r)t+v_r t_1=(v_w+v_r)(t_1-t)$

Stąd

$t_1=2t$

Wobec tego $s=v_r t_t=v_r 2t$, a wiec $v_r=s/2t=$ 5 km/h.

Roz.1 B

Zadanie 1

Szosą równolegle do toru kolejowego jedzie rowerem turysta z prędkością v = 20km/h. W pewnej chwili dogania go pociąg o długości l = 140 m i mija (wyprzedza) go w czasie t = 8 s. Oblicz prędkość pociągu.

Zadanie 2

W ciągu jakiego czasu mijają się dwa pociągi jadące w przeciwnych kierunkach po równoległych torach z prędkościami v_1 = 63 km/h i v_2 = 54 km/h, jeżeli długości tych pociągów są l_1 = 180 m i l_2 = 210 m? W ciągu jakiego czasu pierwszy pociąg wyprzedziłby drugi, gdyby pociągi jechały w tym samym kierunku?

Zadanie 3

Dwa samoloty wylatują równocześnie z tego samego miejsca w kierunkach wzajemnie prostopadłych; jeden z prędkością $v_1 = 300$ km/h, drugi z prędkością $v_2 = 400$ km/h. Jak wzrasta w czasie odległość między tymi samolotami? Ile wynosi ta odległość w chwili, gdy pierwszy samolot przebył drogę $s_1 = 900$ km?

Zadanie 5*

Pływak przepływa rzekę o szerokości H. Pod jakim katem względem brzegu rzeki powinien płynąć, aby przeprawić się na przeciwległy brzeg w najkrótszym czasie? Gdzie się w tym czasie znajdzie po przepłynięciu rzeki i jaką drogę s przepłynie, jeśli prędkość nurtu rzeki jest równa v_1, zaś prędkość pływaka względem wody $v_{2?}$

Zadanie 6

W ciągu pierwszej połowy czasu swego ruchu samochód jechał z prędkością $v_1 = 80$ km/h, a drugą połowę – z prędkością $v_2 = 40$ km/h. Oblicz prędkość średnią samochodu.

Zadanie 7

Pierwszą połowę drogi samochód przejechał z prędkością $v_1 = 80$ km/h, a drugą – z prędkością $v_2 = 40$ km/h. Oblicz prędkość średnią samochodu.

Zadanie 14

Samolot leci ponad szosą ze stałą prędkością na wysokości h. W pewnej chwili widać ten samolot z określonego punktu szosy pod katem α do poziomu. Po czasie t widać go z tego samego punktu pod kątem $\beta > \alpha$. Oblicz prędkość samolotu.

J. Jędrzejewski, W. Kruczek, A. Kujawski „*Zbiór zadań z fizyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia”*

Zadanie 1-3

Każdego dnia o tej samej godzinie z portu A do portu B wyrusza statek i przebywa odległość AB w ciągu 6 dni. Równocześnie z portu B do A, także co dzień i o tej samej porze, wyrusza statek i przebywa tę odległość w ciągu 4 dni. Ile statków spotka po drodze pasażer jadący na jednym z nich? Zadanie rozwiąż graficznie.