Piknik z fizyką
czyli łatwe zadania z pełnymi rozwiązaniami

Wersja z 2009.12.22

Pierwsza wersja pojawiła się 2007.03.16

Piotr Nieżurawski[1]
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

Podstawową cechą podejścia fizycznego jest dążenie
do maksymalnego uproszczenia skomplikowanego
obrazu rzeczywistości, co z reguły prowadzi do stosowania
przybliżeń oraz założeń upraszczających.
Jan Gaj, *Laboratorium fizyczne w domu*

Feigenbaum jest fizykiem [...] i zrobił rzecz bardzo prostą:
obliczał kolejne ilorazy. Kilka wieków temu byłoby to zajęcie
niezwykle czasochłonne, ale w latach siedemdziesiątych
już używano kalkulatorów.
Krzysztof Ciesielski, Zdzisław Pogoda, *Diamenty matematyki*

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań ma na celu przybliżenie czytelnikowi metod używanych przy rozwiązywaniu zadań z fizyki. Szczegółowo omawiane są aspekty fizyczne oraz matematyczne proponowanych sposobów postępowania, które prowadzą do odpowiedzi. Samodzielne przeprowadzenie wszystkich rachunków pomoże czytelnikowi nabyć sprawności w prostych obliczeniach symbolicznych i numerycznych. Wszystkie zadania są łatwe. Zgodnie z przytoczonym na początku cytatem, to właśnie w takich problemach tkwi istota fizyki. Będziemy starali się ją sobie przybliżyć za pomocą wzorów oraz rysunków. A jak pokazuje historia (nie tylko Feigenbauma), warto poświęcić również trochę czasu, aby uzyskać wyniki liczbowe.

[1] Uwagi dotyczące skryptu proszę kierować na adres: pniez@fuw.edu.pl

Odnośniki do wykładu

Poniżej zamieszczono odsyłacze do transparencji z wykładu *„Fizyka dla Geologów”* prowadzonego przez prof. Andrzeja Twardowskiego. Zapoznanie się ze wskazanym materiałem umożliwia poprawne rozwiązanie prezentowanych w tym skrypcie zadań. Transparencje są dostępne na stronie

http://www.fuw.edu.pl/~twardows/geo/

Zadanie 3
***Wykład 1 „Ruch”**, zagadnienia:*
„Ruch - pojęcie prędkości i przyspieszenia”
„Ruch - prędkość średnia”
„Ruch - przykład $v_{śr}$*”*
„Ruch ze stałą prędkością”

Zadanie 4
***Wykład 1 „Ruch”**, zagadnienie:*
„Dodawanie wektorów”
***Wykład 2 „Siły”**, zagadnienia:*
„Zasady dynamiki - I zasada”
„Zasady dynamiki - II zasada”
„Zasady dynamiki - III zasada”
„Pole grawitacyjne”

Zadanie 5
***Wykład 1 „Ruch”**, zagadnienia:*
„Ruch - pojęcie prędkości i przyspieszenia”
„Ruch ze stałym przyspieszeniem”
***Wykład 2 „Siły”**, zagadnienia:*
„Zasady dynamiki - II zasada”
„Pole grawitacyjne”

Zadanie 6
***Wykład 1 „Ruch”**, zagadnienia:*
„Ruch - pojęcie prędkości i przyspieszenia”
„Ruch po okręgu”
***Wykład 2 „Siły”**, zagadnienia:*
„Zasady dynamiki - I zasada”
„Zasady dynamiki - II zasada”
„Pęd i zasada zachowania pędu”

Zadanie 7

Wykład 3 „Praca i energia”*, zagadnienia:*

„Praca”

„Przykłady pracy - tarcie”

„Zachowawczość”

„Energia”

„Energia kinetyczna”

„Energia kinetyczna - przykłady”

„Zachowanie energii”

„Bilans energii - siły niezachowawcze”

Zadanie 8

Wykład 2 „Siły”*, zagadnienia:*

„Pole grawitacyjne”

Wykład 5 „Ciała stałe i płyny”*, zagadnienia:*

„Płyn w polu grawitacyjnym”

Zadania 9 oraz 10

Wykład 2 „Siły”*, zagadnienia:*

„Pole grawitacyjne”

Wykład 5 „Ciała stałe i płyny”*, zagadnienia:*

„Gęstość”

„Prawo Archimedesa”

Zadanie 12

Wykład 6 „Termodynamika 1”*, zagadnienia:*

„Równanie stanu gazu (doskonałego)”

Zadanie 13

Wykład 6 „Termodynamika 1”*, zagadnienia:*

„Przekazywanie ciepła”

„Przewodnictwo cieplne”

Zadanie 14

Wykład 10 „Prąd elektryczny”*, zagadnienia:*

„Prąd elektryczny”

Zadanie 15

Wykład 10 „Prąd elektryczny”*, zagadnienia:*

„Prawo Ohma”

Zadanie 16

Wykład 10 „Prąd elektryczny”*, zagadnienia:*

„Prawo Ohma”

„Prawa przepływu prądu”

„Moc w obwodach prądu”

Zadanie 17

Wykład 13 „Fale 1”*, zagadnienia:*

„Fale - istota sprawy”

„Impulsy falowe”

„Impulsy falowe - funkcja fali”

„Ważny przykład - fala harmoniczna”

„Superpozycja i interferencja fal”

„Fale stojące”

Zadanie 18

Wykład 2 „Siły”*, zagadnienia:*

„Grawitacja”

„Dygresja: Siły natury”

Wykład 9 „Elektrostatyka”*, zagadnienia:*

„Prawo Coulomba - siła Natury”

„Siły elektrostatyczne a grawitacyjne”

Zadania 19 oraz 20

Wykład 16 „Fizyka jądra atomowego”*, zagadnienia:*

„Rozpad promieniotwórczy”

Zadanie 21

Wykład 4 „Relatywizm”*, zagadnienia:*

„Transformacja Lorentza”

„Teoria względności - konsekwencje”

Spis treści

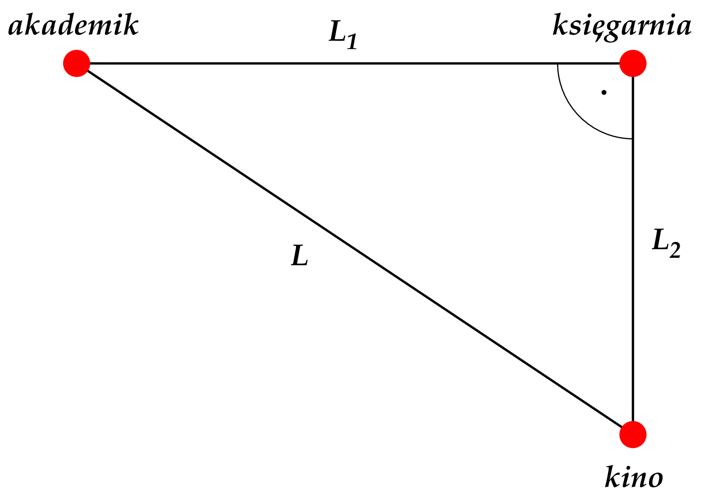
1 Zadanie – Odległość

Student wyruszył z akademika do księgarni. Dotarł tam po przebyciu 400 m, poruszając się cały czas po linii prostej. Następnie udał się w kierunku prostopadłym do odcinka akademik-księgarnia i przeszedł jeszcze 300 m, zanim natrafił na kino. W jakiej odległości od akademika znajduje się kino?

Rozwiązanie

Dla wygody wprowadzam następujące oznaczenia:
$L_1 = 400$ m,
$L_2 = 300$ m,
a L niech będzie szukaną odległością od akademika do kina.

Ponieważ autor zadania nie wprowadził jakiejś specyficznej definicji odległości, więc zakładam, że chodzi mu o odległość w zwykłym znaczeniu. Co to znaczy? Jeśli mam zmierzyć odległość między dwoma punktami, to rozciągam między nimi np. taśmę mierniczą albo przykładam do nich linijkę. Niezależnie od użytego przyrządu odległość między dwoma punktami mierzę wzdłuż prostej przez nie przechodzącej. Dlatego odległość od akademika do kina obliczać należy „w linii prostej”. A więc odcinki L_1, L_2 i L są bokami trójkąta, w którego wierzchołkach leżą akademik, księgarnia i kino.



Ponieważ odcinki L_1 i L_2 są względem siebie prostopadłe, możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Twierdzenie to głosi, że w trójkącie prostokątnym kwadrat najdłuższego boku (tzw. *przeciwprostokątnej*) równy jest sumie kwadratów pozostałych boków (tzw. *przyprostokątnych*). W naszym przypadku przeciwprostokątna ma długość L, a przyprostokątne długości L_1 i L_2, więc otrzymuję równanie:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2$$

Aby uzyskać wynik w postaci $L = \ldots$, powinienem skorzystać z działania odwrotnego do potęgowania. Jest nim pierwiastkowanie. Obliczam więc pierwiastek kwadratowy (czyli drugiego stopnia) obu stron równania:

$$\sqrt{L^2} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$$

Można to równanie zapisać w następującej, równoważnej postaci:

$$(L^2)^{1/2} = (L_1^2 + L_2^2)^{1/2}$$

Tak jak chciałem, lewa strona równa jest po prostu L. Dla wprawienia się w operowaniu wykładnikami możemy to „sprawdzić” następująco: $(L^2)^{1/2} = L^{2\cdot(1/2)} = L^1 = L$. Prawej strony nie można uprościć. Ostatecznie uzyskuję wynik:

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$$

Podstawiam wartości liczbowe:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{(400\,\mathrm{m})^2 + (300\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{4^2 \cdot 100^2\,\mathrm{m}^2 + 3^2 \cdot 100^2\,\mathrm{m}^2} = \\ &= \sqrt{(4^2 + 3^2) \cdot 100^2\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{(16+9) \cdot 100^2\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{25 \cdot 100^2\,\mathrm{m}^2} = \\ &= \sqrt{25}\sqrt{100^2}\sqrt{\mathrm{m}^2} = 5 \cdot 100\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Kino znajduje się w odległości $L = 500\,\mathrm{m}$ od akademika.

Dodatek matematyczny

Poniżej zamieszczono kilka równości, które ilustrują własności potęgowania oraz różne formy jego zapisu.

$$\begin{aligned} a^{bc} &= (a^b)^c = (a^c)^b \\ 2^{2\cdot3} &= 4^3 = 8^2 \\ a^{1/b} &= \sqrt[b]{a} \\ 27^{1/3} &= \sqrt[3]{27} \\ a^{c/b} &= \sqrt[b]{a^c} = (\sqrt[b]{a})^c \\ 8^{2/3} &= \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 \\ a^b a^c &= a^{b+c} \\ 2^1 2^2 &= 2^3 \\ a^{-b} &= 1/a^b \\ 5^{-2} &= 1/25 \end{aligned}$$

2 Zadanie – Jednostki

Wiele wielkości występujących w fizyce wyrażanych jest w określonych jednostkach. Np. odległość możemy wyrazić w metrach [m], masę w gramach [g], czas w sekundach [s], siłę w newtonach (niutonach) [N], energię w joulach (dżulach) [J]. Dla wygody posługujemy się często wielokrotnościami lub częściami jednostek. Powszechnie znanymi przykładami są: kilogram [kg] (czyli 1000 gramów), kilometr [km] (czyli 1000 metrów), centymetr [cm] (czyli 0.01 metra)[2], minuta [min] (czyli 60 sekund) oraz godzina [h] (czyli 60 minut). Często używanymi przedrostkami, które można traktować jak zwykłe liczby mnożące jednostkę, są:

Przedrostek	Nazwa	Wartość
G	giga	10^9
M	mega	10^6
k	kilo	10^3
h	hekto	10^2
da	deka	10
d	decy	10^{-1}
c	centy	10^{-2}
m	mili	10^{-3}
μ	mikro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}

Warto pamiętać również nazwy niektórych dużych liczb: 10^6 to milion, 10^9 to miliard, a 10^{12} to bilion.[3]

Przy potęgowaniu wykładnik potęgi umieszcza się tylko przy jednostce, np.

$$(2\ \mathrm{km})^2 = (2)^2\ (\mathrm{km})^2 = 4\ (\mathrm{km})^2 = 4\ \mathrm{km}^2 \,.$$

Tak więc

$$1\ \mathrm{mm}^2 = 1\ (10^{-3}\mathrm{m})^2 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\ ,$$

a nie $10^{-3}\,\mathrm{m}^2$.

Wyraź następujące wielkości:

a) 10.5 mm, 0.6 km oraz $3.1 \cdot 10^3$ cm w metrach [m],

b) 3.5 h (h=godzina), 45 min (min=minuta), 1 tydzień, 365 dni w sekundach [s],

c) 10 m/min, 5 km/h, 0.5 cm/rok w metrach na sekundę [m/s],

d) 1 kWh w dżulach [J], pamiętając, że 1 W = 1 J/s,

e) 1 m^2, 10^3 mm^2 w centymetrach kwadratowych [cm^2],

f) 2 litry (czyli 2 dm^3), 5 m^3 w centymetrach sześciennych [cm^3].

[2] W niniejszym zbiorze zadań w ułamkach dziesiętnych stosuje się kropkę zamiast przecinka do oddzielania jedności od części dziesiątych (np. $1/10 = 0.1$, $3/100 = 0.03$, $5/2 = 2.5$).

[3] *Uwaga:* W innych krajach, np. w USA, liczebnik 10^9 to „billion”, a 10^{12} to „trillion”.

Rozwiązanie

Punkt (a)

Mam wyrazić 10.5 mm w metrach. Z tabeli odczytuję, że przedrostek m oznacza 10^{-3}. Podstawiam tę liczbę:

$$10.5 \text{ mm} = 10.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Uzyskaną odpowiedź mogę zapisać w równoważnej postaci:

$$10.5 \text{ mm} = 10.5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.0105 \text{ m}$$

Teraz wyrażam 0.6 km w metrach. Wiem, że przedrostek k oznacza 10^3, a więc:

$$0.6 \text{ km} = 0.6 \cdot 10^3 \text{ m} = 600 \text{ m}$$

W ostatnim przypadku, $3.1 \cdot 10^3$ cm, występuje przedrostek c, który jest równy 10^{-2}:

$$3.1 \cdot 10^3 \text{ cm} = 3.1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3.1 \cdot 10^{3-2} \text{ m} = 3.1 \cdot 10 \text{ m} = 31 \text{ m}$$

Odpowiedź: $10.5 \text{ mm} = 0.0105 \text{ m}$, $0.6 \text{ km} = 600 \text{ m}$, $3.1 \cdot 10^3 \text{ cm} = 31 \text{ m}$.

Punkt (b)

Oczywiście 3.5 h mogę zapisać jako $3.5 \cdot (1 \text{ h})$. Godzinę, czyli 1 h, zamieniam na sekundy, wiedząc, że $1 \text{ h} = 60$ min oraz że $1 \text{ min} = 60$ s:

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \cdot (1 \text{ min}) = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s}$$

W takim razie:

$$3.5 \text{ h} = 3.5 \cdot (1 \text{ h}) = 3.5 \cdot (3600 \text{ s}) = 12600 \text{ s}$$

Analogicznie postępuję w kolejnym przypadku:

$$45 \text{ min} = 45 \cdot (1 \text{ min}) = 45 \cdot (60 \text{ s}) = 2700 \text{ s}$$

Jeden tydzień to $7 \cdot 24$ godziny, a więc:

$$1 \text{ tydzień} = 7 \cdot 24 \text{ h} = 7 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 604800 \text{ s} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ s}$$

Jeden rok, czyli 365 dni, to:

$$1 \text{ rok} = 365 \cdot 24 \text{ h} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 31536 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Odpowiedź: $3.5 \text{ h} = 12600$ s, $45 \text{ min} = 2700$ s. W przypadku tygodnia i roku podaję wyniki z dokładnością *do jednej cyfry znaczącej*: $1 \text{ tydzień} \approx 6 \cdot 10^5$ s, $1 \text{ rok} \approx 3 \cdot 10^7$ s.

Punkt (c)

Wartość 10 m/min mogę zapisać jako:

$$10\text{ m/min} = 10\text{ m}/(1\text{ min}) = 10\text{ m}/(60\text{ s}).$$

A więc:

$$10\text{ m/min} = \frac{1}{6}\text{ m/s}.$$

Prędkość „marszową” wyrażam następująco:

$$5\text{ km/h} = 5 \cdot (1\text{ km})/(1\text{ h}) = 5 \cdot (10^3\text{ m})/(3600\text{ s}).$$

I uzyskuję wynik:

$$5\text{ km/h} = \frac{25}{18}\text{ m/s} \approx 1.4\text{ m/s}.$$

Analogicznie zamieniam jednostki dla ostatniej wartości:

$$0.5\text{ cm/rok} = 0.5 \cdot (1\text{ cm})/(1\text{ rok}) \approx 0.5 \cdot (10^{-2}\text{ m})/(3.15 \cdot 10^7\text{ s}),$$

gdzie użyłem przybliżenia 1 rok $\approx 3.15 \cdot 10^7$ s zgodnie z wynikami w punkcie (b). Ostatecznie:

$$0.5\text{ cm/rok} \approx \frac{0.5}{3.15}10^{-2}/10^7\text{ m/s} \approx 0.16 \cdot 10^{-2-7}\text{ m/s} = 1.6 \cdot 10^{-10}\text{ m/s}$$

Odpowiedź: 10 m/min $= \frac{1}{6}$ m/s, 5 km/h ≈ 1.4 m/s oraz 0.5 cm/rok $\approx 1.6 \cdot 10^{-10}$ m/s.

Punkt (d)

Wartość 1 kWh rozbijam na składowe:

$$1\text{ kWh} = 1 \cdot (10^3) \cdot (1\text{ W}) \cdot (1\text{ h}).$$

Zgodnie z równością 1 W = 1 J/s zamieniam jednostki:

$$1\text{ kWh} = 10^3 \cdot (1\text{ J/s}) \cdot (1\text{ h}) = 10^3 \cdot (1\text{ J})/(1\text{ s}) \cdot (1\text{ h}) = 10^3 \cdot (1\text{ J}) \cdot (1\text{ h})/(1\text{ s}).$$

Jeśli wyrażę godzinę przez sekundy, to jednostki czasu się skrócą:

$$1\text{ kWh} = 10^3 \cdot (1\text{ J}) \cdot (3600\text{ s})/(1\text{ s}) = 36 \cdot 10^5\text{ J}.$$

Można zapisać ten wynik, używając przedrostków:

$$1\text{ kWh} = 36 \cdot 10^2\text{ kJ} = 3.6\text{ MJ}.$$

Odpowiedź: 1 kWh $= 36 \cdot 10^5$ J $= 3.6$ MJ.

Punkt (e)

Wartość 1 m^2 mogę zapisać następująco:

$$1\ \mathrm{m}^2 = (1\ \mathrm{m})^2.$$

Wiem, że $1\ \mathrm{cm} = 10^{-2}\ \mathrm{m}$, a mnożąc obie strony tego równania przez 100 uzyskuję: $10^2\ \mathrm{cm} = 1\ \mathrm{m}$. Wykorzystując ten wynik, otrzymuję odpowiedź:

$$1\ \mathrm{m}^2 = (1\ \mathrm{m})^2 = (10^2\ \mathrm{cm})^2 = (10^2)^2(\mathrm{cm})^2 = 10^4\ \mathrm{cm}^2.$$

Z kolejną wartością postępuję podobnie:

$$10^3\ \mathrm{mm}^2 = 10^3(1\ \mathrm{mm})^2.$$

Wiem, że $1\ \mathrm{mm} = 10^{-3}\ \mathrm{m} = 10^{-3}(10^2\ \mathrm{cm}) = 10^{-1}\ \mathrm{cm}$. Ostatecznie:

$$10^3\ \mathrm{mm}^2 = 10^3(1\ \mathrm{mm})^2 = 10^3(10^{-1}\ \mathrm{cm})^2 = 10^3(10^{-1})^2(\mathrm{cm})^2 = 10\ \mathrm{cm}^2.$$

Odpowiedź: $1\ \mathrm{m}^2 = 10^4\ \mathrm{cm}^2$ oraz $10^3\ \mathrm{mm}^2 = 10\ \mathrm{cm}^2$.

Punkt (f)

Jeden litr, czyli 1 dm^3, zapisuję następująco:

$$1\ \mathrm{dm}^3 = (1\ \mathrm{dm})^3$$

Ponieważ $1\ \mathrm{dm} = 10^{-1}\ \mathrm{m} = 10^{-1}(10^2\mathrm{cm}) = 10\ \mathrm{cm}$, więc:

$$2\ \mathrm{dm}^3 = 2(1\ \mathrm{dm})^3 = 2(10\ \mathrm{cm})^3 = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{cm}^3$$

Podobnie postępuję w kolejnym przypadku:

$$5\ \mathrm{m}^3 = 5(1\ \mathrm{m})^3 = 5(10^2\ \mathrm{cm})^3 = 5 \cdot 10^6\ \mathrm{cm}^3$$

Odpowiedź: $2\ \mathrm{dm}^3 = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{cm}^3$ oraz $5\ \mathrm{m}^3 = 5 \cdot 10^6\ \mathrm{cm}^3$.

3 Zadanie – Prędkość średnia

Oblicz średnią prędkość pociągu na trasie Warszawa-Olsztyn-Giżycko, jeśli pokonanie odcinka torów o długości $S_1 = 220$ km z Warszawy do Olsztyna trwało $T_1 = 3$ h 30 min, a odcinek Olsztyn-Giżycko o długości $S_2 = 140$ km pociąg przebył w czasie $T_2 = 2$ h 30 min. Prędkość wyraź w jednostkach [km/h] oraz [m/s].

Rozwiązanie

Czym jest średnia prędkość pociągu? W opisanej podróży pociąg przebył trasę Warszawa-Olsztyn w czasie T_1. Długość torów wynosi S_1. Z jaką prędkością poruszał się pociąg? Nie wiem! Mogę wyobrazić sobie różne scenariusze: pociąg przez pewien czas przyśpieszał, a potem jechał ze stałą prędkością; pociąg zatrzymywał się po drodze; mógł nawet się cofać! Wiem tylko, że w czasie T_1 pokonał odcinek torów o długości S_1. Załóżmy, że czekam na przyjazd pociągu na dworcu w Olsztynie. Dla mnie nie ma znaczenia sposób, w jaki maszynista prowadził parowóz. Jeśli jechałby ze *stałą prędkością* równą $\bar{v}_1 = S_1/T_1$, to po czasie T_1 wjechałby również na olsztyński dworzec, gdyż $\bar{v}_1 T_1 = S_1$. I to właśnie $\bar{v}_1$ jest średnią prędkością pociągu na odcinku Warszawa-Olsztyn.

Podobnie średnia prędkość pociągu między Olsztynem a Giżyckiem wynosi $\bar{v}_2 = S_2/T_2$.

A ile wynosi średnia prędkość pociągu na trasie Warszawa-Olsztyn-Giżycko? Ile musiałaby wynosić prędkość pociągu, gdyby nie przyśpieszał i nie hamował na całej trasie? Całkowita droga to:

$$S = S_1 + S_2$$

A całkowity czas podróży:

$$T = T_1 + T_2$$

Wobec tego średnia prędkość na całej trasie wynosi:

$$\bar{v} = S/T$$

Podstawiam wartości liczbowe:

$$\bar{v} = S/T = (S_1 + S_2)/(T_1 + T_2) = (360 \text{ km})/(6 \text{ h}) = 60 \text{ km/h}$$

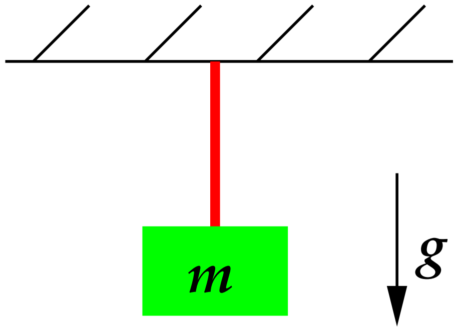
Wyrażam wynik w jednostkach [m/s]:

$$\bar{v} = 60(1 \text{ km})/(1 \text{ h}) = 60(10^3 \text{ m})/(3600 \text{ s}) = \frac{50}{3} \text{ m/s} \approx 16.7 \text{ m/s}$$

Odpowiedź: Średnia prędkość pociągu na trasie Warszawa-Olsztyn-Giżycko wynosi $\bar{v} = 60$ km/h ≈ 16.7 m/s.

4 Zadanie – Żyrandol

Żyrandol o masie $m = 7.4$ kg przyczepiono do sufitu za pomocą linki. Oblicz, jaką siłą działa sufit na linkę i zaznacz na rysunku wektor tej siły. Żyrandol nie porusza się, linka jest nieważka, a cały układ znajduje się w stałym polu grawitacyjnym o natężeniu $g = 10$ m/s^2.



Rozwiązanie

Czym jest siła działająca na ciało o masie m? Zgodnie z drugą zasadą dynamiki siła jest odpowiedzialna za przyśpieszenie, $\vec{a}$, z jakim ciało się porusza:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Przyśpieszenie ciała to zmiana jego prędkości w jednostce czasu. Można to zapisać następująco:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Czym jest $\Delta\vec{v}$? Jest to zmiana prędkości ciała, jaka zaszła w czasie Δt. Jeśli w pewnej chwili czasu prędkość ciała wynosiła $\vec{v}_1$, a po czasie Δt wynosi $\vec{v}_2$, to zmiana prędkości jest równa $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Im przedział czasu Δt jest mniejszy, tym szczegółowiej możemy opisać ruch ciała. Strzałki umieszczone nad v, a oraz F przypominają, że prędkość, przyśpieszenie oraz siła są *wektorami*.

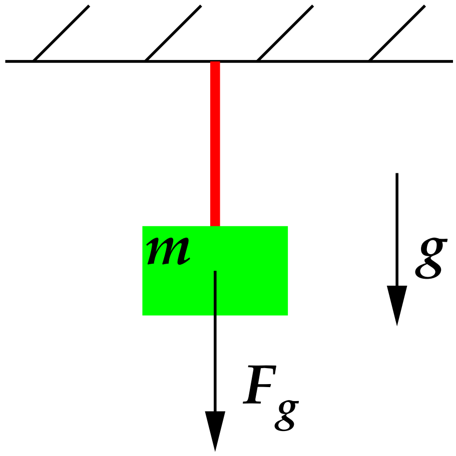
W rozważanym przypadku żyrandol nie porusza się, a więc jego prędkość nie zmienia się. Innymi słowy jego przyśpieszenie wynosi $\vec{a} = 0$ i z drugiej zasady dynamiki otrzymuję proste równanie:

$$0 = \vec{F}$$

O jaką siłę chodzi? Siła $\vec{F}$ jest sumą wszystkich sił działających na ciało. Równanie powyższe wskazuje, że *wypadkowa* siła wynosi 0. Na żyrandol działa siła grawitacji:

$$\vec{F}_g = m\vec{g},$$

której długość wynosi $|\vec{F}_g| = mg$.



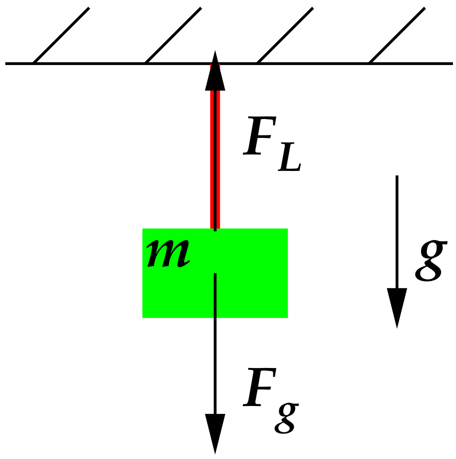
Wektor $\vec{F}_g$ zaczepiony jest w środku masy żyrandola. Nie może być to jedyna siła, gdyż wtedy żyrandol poruszałby się z przyśpieszeniem. Do żyrandola przymocowana jest linka i ona działa na niego siłą $\vec{F}_L$. Zgodnie z treścią zadania siła grawitacji i siła reakcji linki są jedynymi siłami działającymi na żyrandol, a więc ich suma jest siłą wypadkową, $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_L$, która musi spełniać równanie $\vec{F} = 0$, czyli:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_L = 0.$$

Aby to równanie mogło być spełnione, wektor $\vec{F}_L$ musi być równoległy do wektora $\vec{F}_g$, zwroty wektorów muszą być przeciwne, a długości obu wektorów muszą być takie same, czyli:

$$\vec{F}_L = -\vec{F}_g$$

A więc $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_g| = mg$.



Jak „dotrzeć” do sufitu? Rozważam siły działające na linkę. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki (zasada równej akcji i reakcji) siła jaką żyrandol działa na linkę, $\vec{F}_Z$, musi spełniać:

$$\vec{F}_Z = -\vec{F}_L$$

Jednocześnie sufit działa na linkę jakąś siłą – oznaczam ją przez $\vec{F}_S$.

Ile wynosi $\vec{F}_S$? Znowu mogę skorzystać z drugiej zasady dynamiki, która wiąże przyśpieszenie linki ($\vec{a}_L$) oraz jej masę (m_L) z siłami działającymi na linkę:

$$m_L\vec{a}_L = \vec{F}_Z + \vec{F}_S.$$

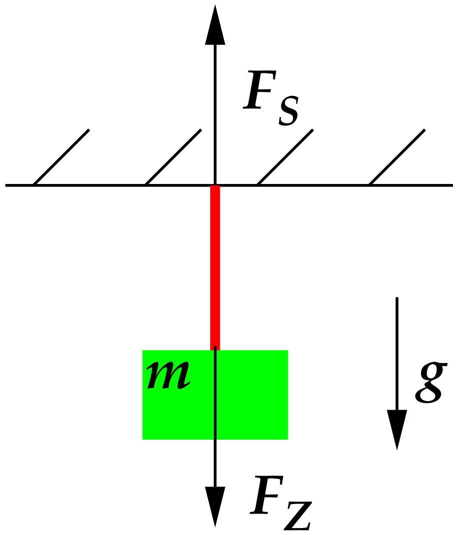
Ponieważ linka nie porusza się, czyli $\vec{a}_L = 0$, więc otrzymujemy:

$$0 = \vec{F}_Z + \vec{F}_S.$$

Należy zauważyć, że do takiego samego wniosku dochodzę korzystając z $m_L = 0$, czyli z faktu, że linka jest nieważka, bez względu na jej przyśpieszenie!

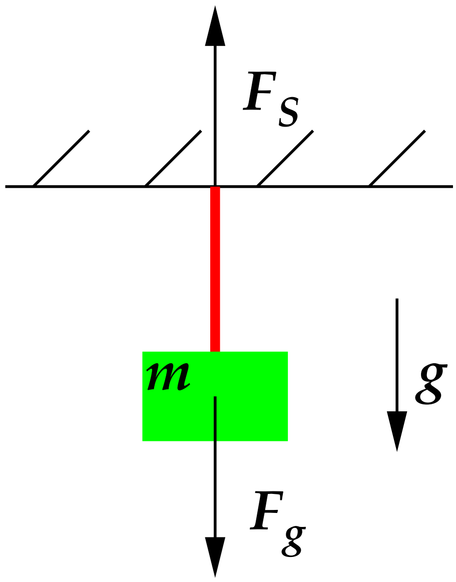
Ostatnią równość przekształcam do postaci:

$$\vec{F}_S = -\vec{F}_Z.$$



Zgodnie z poprzednimi rozważaniami: $\vec{F}_Z = -\vec{F}_L = -(-\vec{F}_g) = \vec{F}_g$. A więc:

$$\vec{F}_S = -\vec{F}_g.$$



Ten sam wynik mogłem uzyskać szybciej, rozpatrując wypadkową siłę działającą na cały układ żyrandol-linka.

Odpowiedź: Siła, jaką działa sufit na linkę ($\vec{F}_S$), jest przeciwna do siły grawitacji działającej na żyrandol: $\vec{F}_S = -\vec{F}_g$. Długość siły $\vec{F}_S$ wynosi:

$$|\vec{F}_S| = |\vec{F}_g| = mg = (7.4 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 74 \text{ N}$$

Czytelnika zachęcam do przeprowadzenia podobnego wnioskowania w następujących przypadkach:
a) gdy nieważka linka jest bardzo rozciągliwa, nie stawiająca oporu,
b) gdy linka jest nierozciągliwa, ale ma masę $m_L = 20$ dag.

Dodatek matematyczny

Poniżej przypominamy podstawowe własności operacji wykonywanych na wektorach. Symbole c oraz d oznaczają liczby. Aby lepiej przyswoić sobie każdą równość, Czytelnik powinien zilustrować ją geometrycznie.

$$\begin{aligned}
\vec{A} - \vec{A} &= 0 \\
c\vec{A} + d\vec{A} &= (c+d)\vec{A} \\
c(\vec{A} + \vec{B}) &= c\vec{A} + c\vec{B} \\
\vec{A} + \vec{B} &= \vec{B} + \vec{A}
\end{aligned}$$

5 Zadanie – Odważnik i jabłko

Odważnik o masie 2 kg trzymamy na wysokości 20 m, a jabłko o masie 0.5 kg na wysokości 5 m nad podłogą. Oblicz czas swobodnego spadku tych ciał w stałym, jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu $g = 10$ N/kg.

Rozwiązanie

Aby określić czas spadania wymienionych ciał, muszę zastanowić się nad tym, jak wygląda ich ruch w polu grawitacyjnym. Na ciało o masie m, umieszczone w polu grawitacyjnym o natężeniu $\vec{g}$ działa siła $\vec{F} = m\vec{g}$. Wektor $\vec{g}$ ma oczywiście długość równą g, a zwrócony jest ku podłodze. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyśpieszenie ciała ($\vec{a}$) związane jest następująco z jego masą oraz działającą na ciało siłą:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Skoro $\vec{F} = m\vec{g}$, to po podstawieniu tej konkretnej postaci siły otrzymuję:

$$m\vec{a} = m\vec{g}.$$

Aby uzyskać równanie postaci $\vec{a} = \ldots$, dzielę obie strony równości przez m, co prowadzi do słynnego wyniku:

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Przyśpieszenie ciała nie zależy więc w tym przypadku od jego masy! Autor zadania, jak widać, próbował mnie zmylić... Ponieważ wektor $\vec{g}$ nie zmienia się, więc przyśpieszenie ciała jest w każdym punkcie przestrzeni i w każdej chwili takie samo.

Przyśpieszenie ciała to zmiana jego prędkości w jednostce czasu:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez Δt, uzyskuję równość:

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t$$

Każde z rozważanych przeze mnie ciał początkowo spoczywało, a więc ich prędkość początkowa wynosiła 0. W takim wypadku, po czasie T prędkość ciała wyniesie:

$$\vec{v} = \vec{a}\, T$$

W tym momencie zauważam, że ruch będzie odbywał się po prostej, gdyż wektor prędkości ma stały kierunek. Mogę więc zrezygnować z zapisu wektorowego i rozważać po prostu wartości prędkości i przyśpieszenia:

$$v = a\, T$$

Jaką drogę S przebędzie ciało w czasie T? Zgodnie ze wzorem dla ruchu jednostajnie przyśpieszonego:

$$S = \frac{1}{2} a\, T^2$$

Czytelnika, który chce poznać pochodzenie tego wzoru, zapraszam do *Dodatku matematycznego* na końcu niniejszego rozwiązania.

W zadaniu podano przebyte przez ciała drogi (wysokości, z jakich spadają), a moim zadaniem jest obliczyć czas T. W tym celu będę tak przekształcać uzyskane równanie, aby doprowadzić je do postaci $T = \ldots$. Na początku dzielę obie strony przez $\frac{1}{2}a$:

$$\frac{2S}{a} = T^2,$$

a następnie z obu stron równania wyciągam pierwiastek kwadratowy:

$$\sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{T^2} = T$$

Ostatecznie wzór ma postać:

$$T = \sqrt{\frac{2S}{a}}$$

W przypadku odważnika podstawiam $S = 20$ m, $a = g = 10$ N/kg:

$$T_{Odw} = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{10 \text{ N/kg}}} = \sqrt{4}\sqrt{\text{m} \cdot \text{kg/N}}$$

Korzystając z równości $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$, uzyskuję wynik:

$$T_{Odw} = 2\sqrt{\text{m} \cdot \text{kg/N}} = 2\sqrt{\text{m} \cdot \text{kg}/(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)} = 2\sqrt{\text{s}^2} = 2 \text{ s}$$

Przy obliczaniu czasu spadania jabłka podstawiam $S = 5$ m oraz $a = g = 10 \text{ N/kg} = 10 \text{ m/s}^2$:

$$T_{Jab} = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{1}\sqrt{\text{s}^2} = 1 \text{ s}$$

Odpowiedź: Odważnik upadnie na podłogę po czasie $T_{Odw} = 2$ s, a jabłko po czasie $T_{Jab} = 1$ s.

Dodatek matematyczny

W tym dodatku przedstawione zostanie wyprowadzenie wzoru na drogę w ruchu prostoliniowym, jednostajnie przyśpieszonym dla ciała początkowo spoczywającego: $S = \frac{1}{2} a\, T^2$. W pierwszej wersji wyprowadzenia używany jest rachunek różniczkowy i całkowy. W drugiej wersji wykorzystano podział czasu na względnie małe interwały. W obu przypadkach rozważany jest tylko ruch wzdłuż prostej, ze stałym przyśpieszeniem i z prędkością początkową równą 0.

Wersja 1

Położenie na prostej opiszemy za pomocą współrzędnej x. Prędkość jest pochodną położenia po czasie:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

A przyśpieszenie jest pochodną prędkości po czasie:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Całkujemy obie strony ostatniego równania po czasie w granicach od chwili początkowej t_0 do chwili bieżącej t:

$$\int_{t_0}^{t} a\, dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt'}\, dt'$$

Rozpatrujemy ruch, w którym przyśpieszenie jest stałe (czyli niezależne od czasu). Dzięki temu lewa całka jest bardzo łatwa:

$$\int_{t_0}^{t} a\, dt' = a \int_{t_0}^{t} dt' = a(t - t_0)$$

Obliczenie prawej całki jest jeszcze prostsze – wystarczy powołać się na podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt'}\, dt' = v(t) - v(t_0)$$

Ale ponieważ ciało początkowo spoczywało, więc $v(t_0) = 0$. Otrzymujemy dobrze znaną równość:

$$v(t) = a(t - t_0)$$

Podstawiamy za prędkość pochodną położenia po czasie:

$$\frac{dx}{dt} = a(t - t_0)$$

I znowu całkujemy obie strony równania po czasie w granicach od chwili początkowej t_0 do chwili bieżącej t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt'}\, dt' = \int_{t_0}^{t} a(t' - t_0)\, dt'$$

Lewa całka to po prostu różnica położenia aktualnego i początkowego:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt'}\, dt' = x(t) - x(t_0)$$

Obliczamy prawą całkę:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} a(t' - t_0)\, dt' &= a(\int_{t_0}^{t} t'\, dt' - t_0 \int_{t_0}^{t} dt') = a[\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)] = \\ &= \frac{1}{2}a(t^2 - 2t_0 t + t_0^2) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2\end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$x(t) - x(t_0) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Różnica położeń ciała jest w tym wypadku drogą, jaką to ciało przebyło: $S = x(t) - x(t_0)$. A wielkość $t - t_0$ jest czasem trwania ruchu: $T = t - t_0$. Uzyskaliśmy więc znany wzór:

$$S = \frac{1}{2}a\,T^2$$

Wersja 2

Podzielmy czas T na N równych przedziałów. Każdy przedział czasu wynosi wtedy:

$$\Delta t = T/N$$

Aby móc precyzyjnie wypowiedzieć się o ruchu ciała, chcemy, by odstępy czasu były niewielkie w porównaniu z czasem T. Niech więc liczba N będzie bardzo duża.

Każdemu przedziałowi, po kolei, przypiszmy liczbę naturalną, którą oznaczymy literą k. Możemy mówić dzięki temu o k-tym przedziale. Indeks k może mieć wartości $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N$.

Jaką prędkość ma ciało po k-tym interwale czasu, czyli po czasie $t_k = k\Delta t$? Zgodnie z definicją przyśpieszenia, gdy jest ono stałe, prędkość ta wynosi:

$$v_k = at_k = ak\Delta t$$

A jaką drogę przebywa ciało w trakcie trwania k-tego interwału czasu? Jeśli interwały czasu są bardzo małe, na tyle, żeby prędkości na krańcach przedziałów były prawie równe ($v_{k-1} \approx v_k$), to z dobrym przybliżeniem ten fragment drogi, Δx_k, będzie wynosić:

$$\Delta x_k = v_k \Delta t = ak\Delta t \Delta t = ak(\Delta t)^2$$

Oczywiście suma wszystkich fragmentów drogi jest równa całej drodze przebytej przez ciało:

$$S = \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} ak(\Delta t)^2$$

Ponieważ przyśpieszenie oraz interwał czasu nie zależą od k (są takie same w każdym przedziale czasu), więc możemy je wyłączyć przed znak sumy:

$$S = a(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{N} k$$

Ile wynosi suma liczb naturalnych od 1 do N (jest to tzw. szereg arytmetyczny)? Czytelnik może sam sprawdzić, stosując np. indukcję matematyczną, że zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{2} N(N+1)$$

Równanie to można również wyprowadzić następująco:

$$1 + 2 + \ldots + (N-1) + N = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (N-1) & + & N \\ & & & & + & & & & \\ N & + & (N-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{array} \right) /2 = \frac{1}{2} N(N+1)$$

Widać, że dodając do siebie ten sam szereg, ale zapisany w odwrotnej kolejności, uzyskujemy N wyrazów, z których każdy ma wartość $N+1$. Ponieważ interesuje nas suma jednego szeregu, więc musimy pamiętać o podzieleniu przez 2.

W takim razie otrzymujemy wynik:

$$S = a(\Delta t)^2 \frac{1}{2} N(N+1) = \frac{1}{2}\, a(T/N)^2 N(N+1) = \frac{1}{2}\, aT^2 \frac{N+1}{N}$$

Zgodnie z naszym założeniem, że N jest bardzo duże, przechodzimy do granicy z N dążącym do nieskończoności:

$$S = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\, aT^2 \frac{N+1}{N} = \frac{1}{2}\, aT^2 (\lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{N})$$

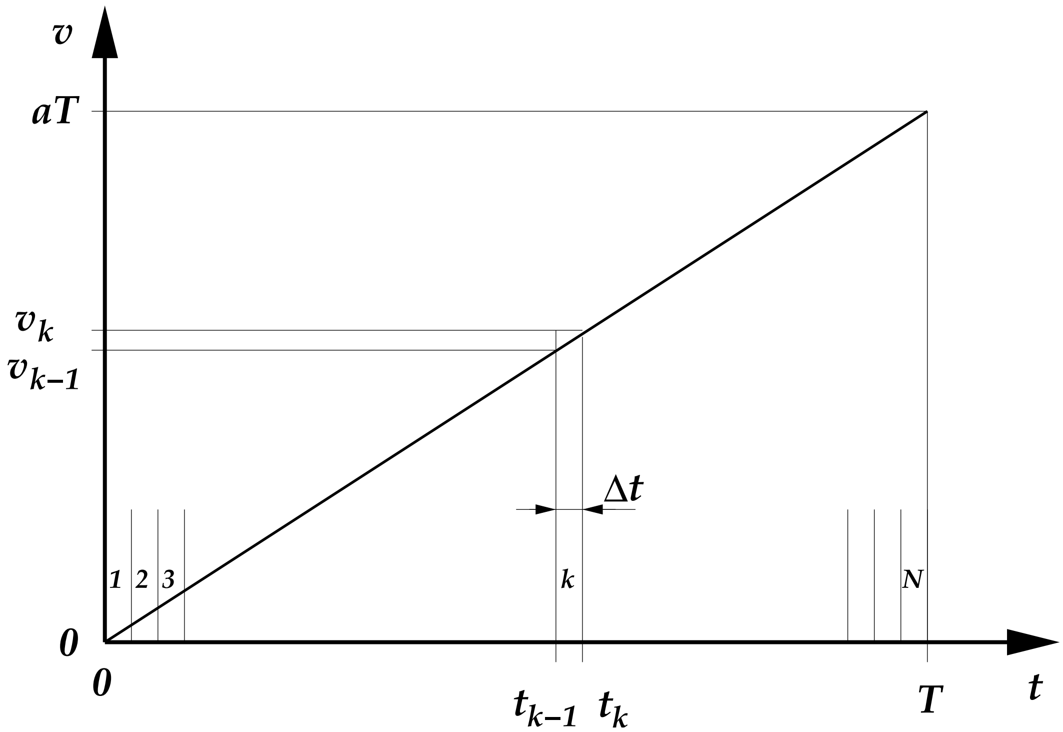
Granica członu zależnego od N wynosi:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{N} = \lim_{N\to\infty} (1 + \frac{1}{N}) = 1$$

Ostatecznie otrzymujemy wynik:

$$S = \frac{1}{2} a\, T^2$$

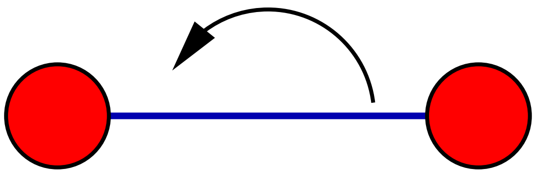
Dla lepszego zrozumienia poszczególnych kroków tego wyprowadzenia pomocny może być poniższy rysunek.



Przedstawioną procedurę można zinterpretować jako liczenie pola trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych T oraz $a\,T$, czyli pola pomiędzy wykresem funkcji $v(t)$ a osią czasu.

6 Zadanie – Awaria sznurka

Układ dwóch jednakowych ciężarków połączonych nierozciągliwym sznurkiem wiruje w przestrzeni kosmicznej. Środek sznurka nie przemieszcza się. Narysuj wektory prędkości ciężarków w chwilę po pęknięciu sznurka, jeśli układ wirował tak, jak zaznaczono na rysunku. Zaniedbaj oddziaływanie grawitacyjne pomiędzy ciężarkami.



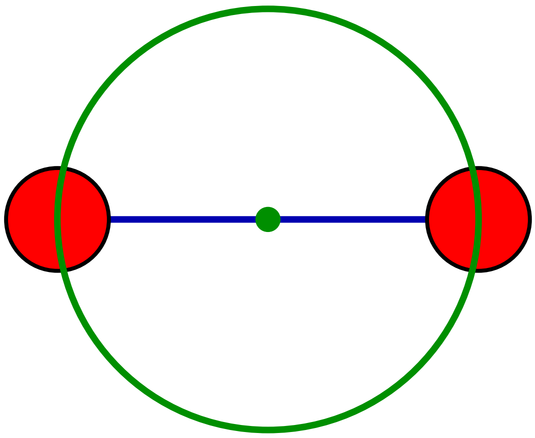
Rozwiązanie

Na każdy z ciężarków działa tylko siła reakcji sznurka. Gdy on pęka, każdy z ciężarków będzie poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym, czyli ze stałą prędkością. Jaką? Taką jaką miał w chwili „awarii” sznurka. Kierunek tej prędkości postaram się wyznaczyć wychodząc z definicji prędkości:

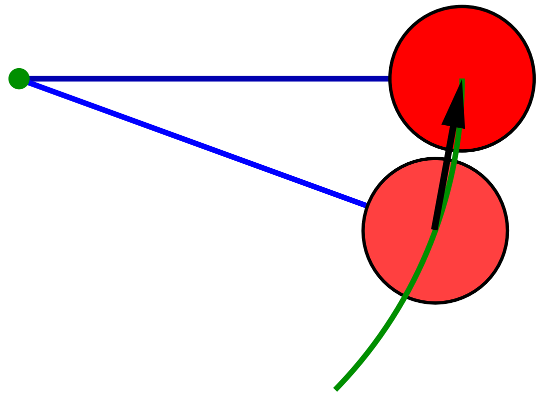
$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \ ,$$

gdzie $\Delta \vec{r}$ jest wektorem przesunięcia ciała, które to przesunięcie nastąpiło w przedziale czasu Δt, przy czym tym lepsze otrzymujemy przybliżenie prędkości w danej chwili, im przedział czasu Δt jest mniejszy. Z definicji wynika, że kierunek prędkości jest taki sam jak kierunek przesunięcia. Jaki kierunek i zwrot ma przesunięcie?

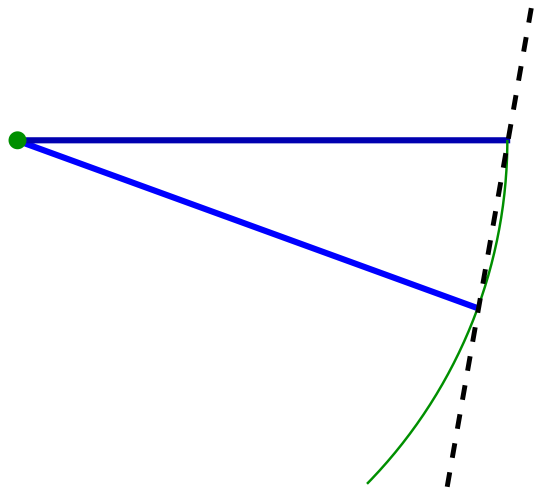
Przed zerwaniem sznurka ciężarki musiały poruszać się po okręgu: środek sznurka nie przemieszczał się oraz nie zmieniała się odległość między ciężarkami.



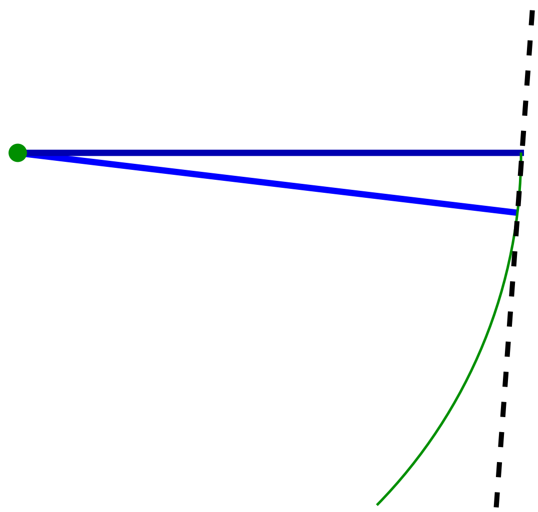
Załóżmy, że powyższy rysunek przedstawia położenie ciężarków w chwili pęknięcia sznurka. Teraz wybieram pewne wcześniejsze położenie – wcześniejsze o interwał czasu T. Nie jest ważna w tej chwili dokładna wartość T, ale chcę, aby po czasie T ciężarki dotarły do „punktu zerwania” bez wykonywania pełnego obrotu. Na poniższym rysunku zaznaczam wektor przesunięcia jednego z ciężarków (prawego):



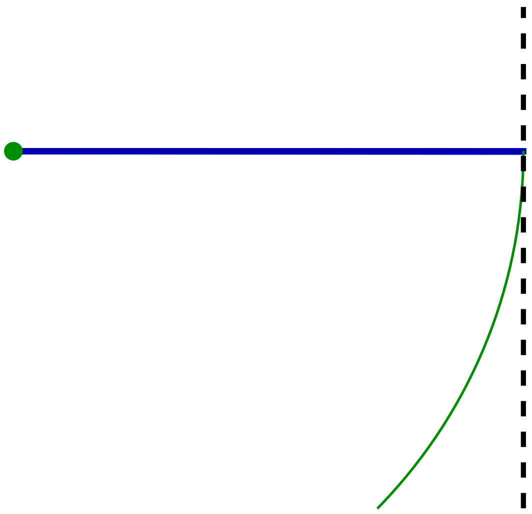
Dla poprawienia przejrzystości rysunku rezygnuję z zaznaczania ciężarka, a zamiast wektora przesunięcia wykreślam tylko jego kierunek (linią przerywaną):



Jaki jest kierunek wektora przesunięcia między położeniem wcześniejszym o interwał czasu T' a położeniem w chwili zerwania sznurka, jeśli $T' < T$? Na przykład taki:

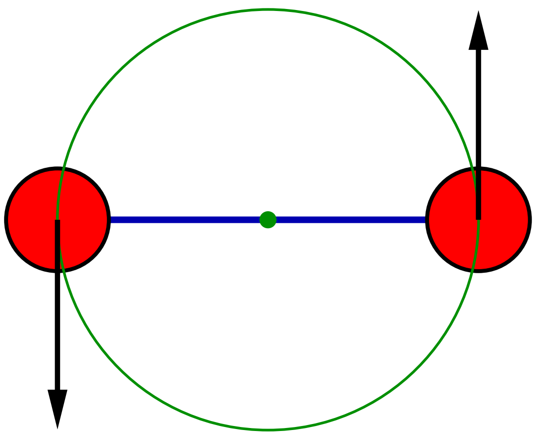


Wiem, że najbardziej precyzyjniej określę prędkość ciężarka w chwili pęknięcia sznurka, jeśli interwał czasu między położeniem początkowym i końcowym będzie zbliżać się do zera. A to oznacza, że odległość między punktami również będzie zbliżać się do zera. Spróbuję narysować kierunek wektora przesunięcia w takiej granicznej sytuacji:



Otrzymałem prostą styczną do okręgu. Skąd to wiem? Postępowanie, które właśnie opisałem, jest metodą uzyskiwania stycznej do krzywej! Styczna do krzywej w pewnym punkcie A to prosta przechodząca przez dwa punkty należące do krzywej, gdy dążą one do punktu A. W takim razie możemy uogólnić powyższe rozważanie: wektor prędkości ciała poruszającego się po dowolnej krzywej jest zawsze styczny do tej krzywej! Innymi słowy: wyznaczając wektor prędkości w danym punkcie toru, wyznaczamy kierunek stycznej w tym punkcie do krzywej opisującej tor. (Należy pamiętać, że nie zawsze możemy wyznaczyć jednoznacznie kierunek styczny, np. w wierzchołkach trójkąta).

Odpowiedź: Prędkości ciężarków w chwili „awarii” sznurka (i potem) są wektorami o kierunku stycznym do toru ciężarków:



Dociekliwemu Czytelnikowi pozostawiam zastanowienie się nad tym, dlaczego autor zadania sugeruje zaniedbanie oddziaływania grawitacyjnego między ciężarkami.

7 Zadanie – Student, skrzynia i lodowisko

Oblicz pracę, jaką wykonał student, rozpędzając na lodowisku skrzynię o masie $m = 200$ kg do prędkości $v = 1$ m/s. Skrzynia początkowo spoczywała, a podczas przyśpieszania przebyła drogę $S = 20$ m. W trakcie przesuwania na skrzynię działa pozioma, stała siła oporu o wartości $T = 30$ N.

Rozwiązanie

Praca W, jaką wykonał student, została zużyta na rozpędzenie skrzyni (a więc nadanie jej energii kinetycznej) oraz na pokonanie sił tarcia:

$$W = E_{kin} + Q \ ,$$

gdzie E_{kin} oznacza energię kinetyczną skrzyni, a Q pracę włożoną w pokonanie sił tarcia. Wielkości te wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ Q &= TS \end{aligned}$$

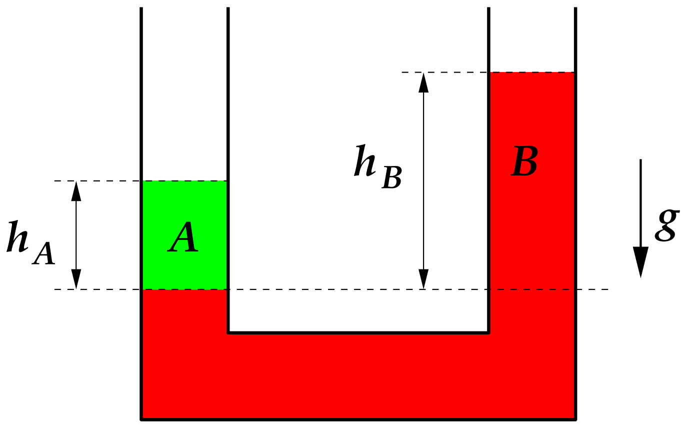
Podstawiając wartości podane w zadaniu otrzymuję:

$$W = E_{kin} + Q = \frac{1}{2}mv^2 + TS = 100\,\mathrm{J} + 600\,\mathrm{J} = 700\,\mathrm{J}$$

Odpowiedź: Student wykonał pracę o wartości $W = 700$ J.

8 Zadanie – Dwie ciecze w U-rurce

Oblicz stosunek gęstości cieczy A do gęstości cieczy B znajdujących się w tzw. U-rurce, która jest przedstawiona na rysunku, jeśli wiadomo, że $h_A = h_B/2$.



Rozwiązanie

Zakładam, że ciecze się nie poruszają. Jeśli tak, to ciśnienia wywierane przez słup cieczy A o wysokości h_A oraz słup cieczy B o wysokości h_B na ciecz znajdującą się poniżej dolnej poziomej linii muszą być równe:

$$p_A = p_B$$

W stałym, jednorodnym polu grawitacyjnym interesujące nas ciśnienia wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} p_A &= \rho_A h_A g \\ p_B &= \rho_B h_B g \end{aligned}$$

Przyrównując je:

$$\rho_A h_A g = \rho_B h_B g \ ,$$

otrzymuję równanie, które przekształcam do postaci $\rho_A/\rho_B = \ldots$. Ostatecznie otrzymuję:

$$\rho_A/\rho_B = h_B/h_A = 2$$

Odpowiedź: Stosunek gęstości cieczy A do gęstości cieczy B wynosi $\rho_A/\rho_B = 2$.

Pytanie dodatkowe: Dlaczego w tym przypadku rozważamy ciśnienia a nie po prostu siły, jakimi działają słup cieczy A o wysokości h_A oraz słup cieczy B o wysokości h_B na ciecz znajdującą się poniżej dolnej poziomej linii?

9 Zadanie – Czubek góry lodowej

Jaka część objętości bryły lodu o gęstości $\rho_L = 916$ kg/m^3 znajduje się poniżej lustra wody. Gęstość wody, w której pływa bryła, wynosi $\rho_W = 1000$ kg/m^3.

Rozwiązanie

Skoro bryła lodu nie porusza się w pionie, to – zgodnie z drugą zasadą dynamiki – wypadkowa siła działająca na bryłę w tym kierunku musi być równa zeru. Jakie siły działają na pływający kawałek lodu? W tym przypadku istotne są tylko dwie siły: siła ciężkości lodu (F_L) oraz siła wyporu, czyli siła ciężkości wody wypartej przez lód (F_W). Ich wartości wynoszą:

$$\begin{aligned} F_L &= V\rho_L g \\ F_W &= V_z \rho_W g \ , \end{aligned}$$

gdzie V jest objętością bryły lodu, a V_z objętością wypartej przez lód wody. Wielkość V_z jest oczywiście objętością tej części bryły lodu, która znajduje się poniżej lustra wody. Z warunku równowagi sił:

$$F_L = F_W$$

otrzymuję szukany stosunek objętości:

$$V_z/V = \rho_L/\rho_W = 91.6\%$$

Odpowiedź: Poniżej lustra wody znajduje się 91.6% objętości bryły lodu.

Czy wszystko jest rzeczywiście takie *oczywiste*? Czytelnika pozostawiam z pytaniem, czy ten stosunek zależy od kształtu bryły lodu...

10 Zadanie – Topnienie Antarktyki

Lody Antarktyki topnieją obecnie w tempie około $a = 2 \cdot 10^{11}$ ton na rok (J. L. Chen i in., *Nature Geoscience*, 22.11.2009). Można spotkać opinie, iż ten proces znacząco wpłynie na poziom wód. Oceany i morza stanowią około 70% powierzchni Ziemi. Zakładając poniżej opisane modele, oszacuj, o ile podniósłby się poziom mórz i oceanów w przeciągu 10 lat, jeśli nie zmieniłoby się tempo topnienia. Gęstość wody $\rho_w = 1000$ kg/m^3 oraz gęstość lodu $\rho_l = 916$ kg/m^3. Przyjmij, że poziom morza znajduje się w odległości $R_Z = 6370$ km od środka Ziemi. Objętość cienkiej warstwy wody o grubości h na powierzchni kuli o promieniu R jest równa $V_w = 4\pi R^2 h$ (zauważ podobieństwo do wzoru na objętość prostopadłościanu: *pole podstawy razy wysokość*).

Model „lód nad wodą”
Załóż, że cały topniejący lód znajduje się na sztywnym skalistym podłożu powyżej poziomu wody.

Model „lód w wodzie”
Załóż, że topniejący lód przylega do sztywnego skalistego podłoża i jest całkowicie zanurzony w wodzie.

Model „pływający lód”
Załóż, że topnieje pływająca (nie dotykająca dna) góra lodowa.

Rozwiązanie

Oznaczenia:

h - zmiana poziomu mórz i oceanów

m - masa stopionego lodu i jednocześnie uzyskanej wody

$$\begin{aligned} m &= a \cdot (10 \text{ lat}) \\ &= 2 \cdot 10^{15} \text{ kg} \end{aligned}$$

V_w - objętość uzyskanej wody

$$\begin{aligned} V_w &= m/\rho_w \\ &= 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

W modelu „lód nad wodą”

Morza i oceany zwiększą objętość o V_w wody. Wzrost poziomu można obliczyć z równania

$$4\pi R_Z^2 h \cdot 70\% = V_w \ ,$$

w którym zajmujemy się tylko 70% powierzchni Ziemi. Szukana zmiana poziomu wód:

$$\begin{aligned} h &= V_w/(4\pi R_Z^2 \cdot 70\%) \\ &\approx 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

Bezpośredni wpływ topnienia lodów Antarktyki byłby więc nieznaczny nawet w skali 10 lat.

W modelu „lód w wodzie”

Morza i oceany zwiększą objętość o V_w wody, ale zmniejszą objętość o objętość stopionego lodu V_l. Wzrost poziomu można obliczyć z równania

$$4\pi R_Z^2 h \cdot 70\% = V_w - V_l \ ,$$

gdzie

$$V_l = m/\rho_l \approx 2{,}18 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^3$$

Szukana zmiana poziomu wód:

$$\begin{aligned} h &= (V_w - V_l)/(4\pi R_Z^2 \cdot 70\%) \\ &\approx -5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = -0{,}5\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

Poziom wody więc nieznacznie obniży się (objętość lodu jest większa niż wody)!

W modelu „pływający lód”

Zgodnie z prawem Archimedesa pływające ciało wypiera masę wody równą własnej masie. A więc poziom wód nie zmieni się! Woda powstała ze stopnienia lodu „wypełni” dokładnie tę objętość poniżej poziomu wody, którą zajmowała pływająca bryła lodu.

Można to pokazać za pomocą równań. Prawo Archimedesa: *ciężar góry = siła wyporu*

$$mg = V_Z \rho_w g \ ,$$

gdzie V_Z jest objętością tej części góry lodowej, która znajduje się poniżej poziomu wody. Jak widać jest ona równa

$$V_Z = m/\rho_w = V_w \ ,$$

czyli objętości wody, która powstanie ze stopienia lodu.

11 Zadanie – Liczba cząsteczek

Objętość jednego mola gazu doskonałego w warunkach normalnych, czyli przy temperaturze $T = 0°$C i ciśnieniu 101325 Pa, wynosi około 22.4 dm^3. Oblicz, ile cząsteczek gazu znajduje się w 1 mm^3 tego gazu. Liczba cząsteczek w jednym molu to około $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$.

Rozwiązanie

Najpierw obliczę, ile cząsteczek gazu przypada na jednostkę objętości. Nazwę tę wielkość np. *koncentracją cząsteczek* i oznaczę jako n:

$$n = N_A/V \ ,$$

gdzie $V = 22.4$ dm^3. Podstawiam wartości liczbowe:

$$n = N_A/V = 6.022 \cdot 10^{23}/(22.4 \text{ dm}^3) \approx 0.27 \cdot 10^{23} \text{ dm}^{-3}$$

Liczbę cząsteczek w 1 mm^3 obliczam mnożąc n przez tę objętość:

$$n \cdot (1 \text{ mm}^3) = 0.27 \cdot 10^{23} \cdot (1 \text{ dm})^{-3} \cdot (1 \text{ mm})^3$$

Pamiętając, że $1 \text{ dm} = 10^{-1}$ m oraz $1 \text{ mm} = 10^{-3}$ m upraszczam iloczyn ostatnich dwóch czynników:

$$\begin{aligned}(1 \text{ dm})^{-3} \cdot (1 \text{ mm})^3 &= (10^{-1} \text{ m})^{-3} \cdot (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{(-1)\cdot(-3)} \cdot (1 \text{ m})^{-3} \cdot 10^{(-3)\cdot 3} \cdot (1 \text{ m})^3 = \\ &= 10^{3-9}(1 \text{ m})^{-3+3} = 10^{-6}(1 \text{ m})^0 = 10^{-6}\end{aligned}$$

Można to zrobić trochę zgrabniej:

$$\begin{aligned}(1 \text{ dm})^{-3} \cdot (1 \text{ mm})^3 &= (1 \text{ mm})^3/(1 \text{ dm})^3 = [(1 \text{ mm})/(1 \text{ dm})]^3 = \\ &= [10^{-3}/10^{-1}]^3 = 10^{(-2)\cdot 3} = 10^{-6}\end{aligned}$$

Otrzymuję ostatecznie wynik:

$$n \cdot (1 \text{ mm}^3) = 0.27 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-6} = 0.27 \cdot 10^{17}$$

Odpowiedź: W warunkach normalnych w objętości równej 1 mm^3 znajduje się około $2.7 \cdot 10^{16}$ cząsteczek gazu.

12 Zadanie – Gaz doskonały

W gazie doskonałym o objętości V i temperaturze T (w skali Kelvina) panuje ciśnienie p. Ten sam gaz ściśnięto do objętości $V' = V/10$ oraz schłodzono do temperatury $T' = T/9$.
Ile wynosi ciśnienie gazu po tych zmianach? Czy jest większe od p?

Rozwiązanie

Wiem, że dla ustalonej porcji gazu doskonałego wyrażenie

$$pV/T$$

nie zmienia się. Po zmianie objętości i temperatury w gazie będzie panować ciśnienie p'. Nowe wartości parametrów gazu muszą spełniać jednak warunek:

$$pV/T = p'V'/T'$$

Wiadomo, że $V' = V/10$ oraz $T' = T/9$. Podstawiam te wartości:

$$pV/T = p'(V/10)/(T/9)$$

Obie strony równości mnożę przez T oraz dzielę przez V:

$$p = \frac{9}{10}p'$$

Po pomnożeniu obu stron przez $\frac{10}{9}$ otrzymuję wartość nowego ciśnienia:

$$p' = \frac{10}{9}p$$

Ponieważ $\frac{10}{9}p > p$, więc nowe ciśnienie jest większe.
Odpowiedź: Ciśnienie gazu po zmianach zwiększyło się i wynosi $p' = \frac{10}{9}p$.

13 Zadanie – Lodówka

Powierzchnia zewnętrzna lodówki wynosi 5 m^2, a grubość warstwy izolacyjnej 3 cm. Wewnątrz lodówki panuje temperatura 3° C, a na zewnątrz 23° C. Nie znając szczegółów związanych z geometrią lodówki, oszacuj prąd cieplny przez ścianki lodówki, jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału izolacyjnego jest równy $k = 0.03$ W/(K·m).

Rozwiązanie

Prąd cieplny, P, jest to ilość ciepła przekazywana w jednostce czasu. Nie znając szczegółów budowy lodówki szacuję P, jakby był to prąd cieplny przez płaską płytę. Wynosi on:

$$P = k\,\Delta T\,S/L\ ,$$

gdzie ΔT jest różnicą temperatur z obu stron płyty, S jest powierzchnią płyty, a L jej grubością. W rozpatrywanym przypadku:

$$\begin{aligned}\Delta T &= 23^\circ\,\mathrm{C} - 3^\circ\,\mathrm{C} = 20^\circ\,\mathrm{C}\\ S &= 5\ \mathrm{m}^2\\ L &= 3\ \mathrm{cm}\end{aligned}$$

Podstawiam wartości liczbowe:

$$P = k\,\Delta T\,S/L = (0.03 \cdot 20 \cdot 5/3)(1\ \text{W})(1^\circ\,\text{C})(1\ \text{m}^2)(1\ \text{K})^{-1}(1\ \text{m})^{-1}(1\ \text{cm})^{-1}$$

Najpierw upraszczam jednostki:

$$\begin{gathered}(1\ \text{W})(1^\circ\,\text{C})(1\ \text{m}^2)(1\ \text{K})^{-1}(1\ \text{m})^{-1}(1\ \text{cm})^{-1} = \\ = (1\ \text{W})(1^\circ\,\text{C})(1\ \text{K})^{-1}(1\ \text{m})^2(1\ \text{m})^{-1}(10^{-2}\ \text{m})^{-1} = \\ = (1\ \text{W})(1^\circ\,\text{C})(1\ \text{K})^{-1} \cdot 10^2 = \\ = 10^2\ \text{W}\ ,\end{gathered}$$

gdzie skorzystałem z faktu, iż odstęp jednego stopnia w skali Kelvina (1 K) jest równy odstępowi jednego stopnia w skali Celsjusza (1° C). Skale te różnią się wyborem punktów, gdzie temperatura równa się zeru, ale zmianie temperatury o 1 K odpowiada zmiana o 1° C.

Ostatecznie uzyskuję wynik:

$$P = 100\ \text{W}$$

Odpowiedź: Prąd cieplny oszacowałem na około 100 W.

14 Zadanie – Bateria „paluszek” contra piorun

Obliczyć całkowity ładunek, który przepłynął podczas rozładowywania baterii (AA, 1.5 V) przez 5 dni ze średnim natężeniem 20 mA. Porównać z ładunkiem przepływającym podczas wyładowania atmosferycznego o średnim natężeniu 200 A, które trwało 0.5 s.

Rozwiązanie

Natężenie prądu I jest ilością ładunku, jaki przepłynął w jednostce czasu. Prąd średni obliczamy dzieląc całkowity ładunek Q, który przepłynął w czasie T:

$$I = Q/T$$

Wobec tego ładunek możemy obliczyć jako iloczyn średniego prądu i czasu:

$$Q = IT$$

W rozpatrywanych przypadkach otrzymuję:

$Q_{Bateria} = 20 \cdot 5$ mA dzień $= 20 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 24 \cdot 3600$ A s $= 10 \cdot 24 \cdot 36$ A s $= 8640$ C

$Q_{Piorun} = 200 \cdot 0.5$ A s $= 100$ C

Odpowiedź: Ładunek, który przepłynął podczas rozładowywania baterii, wynosi 8640 C. Jest on prawie 90 razy większy od ładunku, który przepłynął podczas wyładowania atmosferycznego.

15 Zadanie – Opornik

Przez opornik podłączony do źródła prądu stałego o napięciu $U = 220$ V płynie prąd o natężeniu $I = 0.11$ A. Oblicz natężenie prądu, jaki popłynie przez ten sam opornik, jeśli podłączymy go do źródła o napięciu $U' = 20$ V.

Rozwiązanie

Zgodnie z prawem Ohma:

$$U = RI \ ,$$

gdzie R jest oporem opornika. Po podłączeniu tego samego opornika do źródła o napięciu U' musi obowiązywać związek:

$$U' = RI'$$

Czyli natężenie po zmianie wyniesie:

$$I' = U'/R$$

Wartość oporu mogę obliczyć z pierwszego równania:

$$R = U/I$$

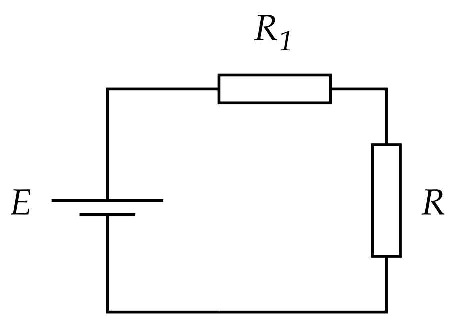
Ostatecznie:

$$I' = IU'/U = 0.11 \text{ A} \frac{20}{220} = 0.01 \text{ A}$$

Odpowiedź: Natężenie prądu wyniesie $I' = 0.01$ A.

16 Zadanie – Dzielnik napięcia

Obliczyć spadek napięcia na oporze R oraz moc wydzielaną przez cały układ, jeśli $E = 2$ V, $R = 1.75\ \Omega$ oraz $R_1 = 0.25\ \Omega$.



Rozwiązanie

Całkowity opór obwodu wynosi $R_c = R_1 + R$. Zgodnie z prawem Ohma:

$$E = I(R_1 + R)$$

Spadek napięcia, U, na oporze R:

$$U = RI = ER/(R_1 + R) = 1.75 \text{ V}$$

Moc wydzielana przez cały układ:

$$P = EI = E^2/(R_1 + R) = 2 \text{ W}$$

17 Zadanie – Fale na wężu

Na długim wężu gumowym wytwarzane są poprzeczne fale harmoniczne, których grzbiety poruszają się z prędkością $v = 3$ m/s, a odległość między dwoma sąsiednimi grzbietami wynosi $L = 1.5$ m. Niezależnie zaczęto wytwarzać falę poprzeczną biegnącą w przeciwną stronę z tą samą wartością prędkości, odległością między grzbietami, amplitudą oraz płaszczyzną polaryzacji. Opisz zachowanie węża w zależności od położenia i czasu. Czy są takie miejsca, w których wąż jest nieruchomy? Gdzie one się znajdują? Czy są takie chwile, gdy cały wąż jest prosty?

Wskazówka: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin[(\alpha+\beta)/2]\,\cos[(\alpha-\beta)/2]$

Rozwiązanie

Zakładam, że początkowo wąż leży wzdłuż osi X. Jego wychylenie będę opisywać za pomocą współrzędnej y. Sformułowanie 'fala harmoniczna' oznacza, że kształt węża w dowolnej, ustalonej chwili można opisać funkcją

$$y(x,\ t = \text{const}) = A\sin(kx + \phi)$$

Ponieważ w zadaniu nie opisano kształtu węża w chwili początkowej, więc dla uproszczenia przyjmuję, że w wybranej przeze mnie chwili t_0 wąż jest opisywany funkcją

$$y(x,\ t_0) = A\sin(kx)$$

Jaką rolę odgrywają liczby A i k? Ponieważ dla dowolnego x wartość bezwzględna funkcji $\sin(kx)$ jest mniejsza lub równa 1,

$$|\sin(kx)| \leq 1\ ,$$

więc A jest największym możliwym wychyleniem węża (tzw. *amplituda*). Współczynnik k określa, jak zmienia się wychylenie w zależności od położenia na osi X. Wiem, że okres funkcji sinus wynosi 2π, czyli dla dowolnego położenia x spełniona jest równość

$$\sin(kx) = \sin(kx + 2\pi) = \sin(kx - 2\pi) = \sin(kx + 2\cdot 2\pi) = \sin(kx - 2\cdot 2\pi) = \ldots$$

Z treści zadania wynika, że odległość między sąsiednimi grzbietami (a więc takimi samymi wychyleniami) wynosi L. Czyli w punktach $x - L$ oraz $x + L$ powinniśmy dostać takie samo wychylenie jak w punkcie x.

Wychylenie w punkcie $x+L$ wynosi

$$y(x+L,\ t_0) = A\sin[k(x+L)] = A\sin(kx+kL)$$

Aby spełniony był warunek

$$y(x+L,\ t_0) = y(x,\ t_0)$$

iloczyn kL musi być równy 2π, a to oznacza, że

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Wielkość L jest zwana *długością fali*, a wielkość k *liczbą falową*.

Dotychczas rozważałem kształt węża w pewnej ustalonej chwili. Jak zmieni się wychylenie po czasie t? Odkształcenia węża (nie sam wąż) mają przesuwać się z prędkością v, a więc funkcja powinna wyglądać następująco:

$$y(x,\ t) = y(x-vt)\ ,$$

jeśli fala rozchodzi się zgodnie ze zwrotem osi X.

Otrzymuję opis wychylenia węża w dowolnym punkcie, w dowolnej chwili:

$$y(x,\ t) = A\sin[k(x-vt)]$$

Druga fala biegnie w przeciwną stronę. Związane z nią wychylenie węża opisuję funkcją

$$y'(x,\ t) = A\sin[k(x+vt)]$$

Wychylenie węża y_w będzie sumą wychyleń y i y':

$$y_w(x,\ t) = y(x,\ t) + y'(x,\ t) = A\sin[k(x-vt)] + A\sin[k(x+vt)] = A\{\sin[k(x-vt)] + \sin[k(x+vt)]\}$$

Zgodnie ze wskazówką

$$\sin[k(x-vt)] + \sin[k(x+vt)] = 2\ \sin(kx)\ \cos(-kvt)$$

Ponieważ funkcja cosinus jest symetryczna, więc $\cos(-kvt) = \cos(kvt)$.

Ostatecznie otrzymuję wynik

$$y_w(x,\ t) = 2A\sin(kx)\ \cos(kvt)\ ,$$

gdzie $k = 2\pi/L = 2\pi/(1.5\ \mathrm{m}) \approx 4\ \mathrm{m}^{-1}$ oraz $kv \approx 12\ \mathrm{s}^{-1}$.

Wąż będzie nieruchomy w miejscach, które spełniają warunek

$$y_w(x,\ t) = 0$$

dla dowolnego t. Warunek ten będzie spełniony dla takich x, które są rozwiązaniem równania

$$\sin(kx) = 0$$

A więc musi zachodzić $kx = n\pi$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Wobec tego wąż będzie nieruchomy w położeniach

$$x_n = n\pi/k = nL/2 = n \cdot 0.75 \text{ m}$$

Dwa sąsiednie takie położenia będą odległe od siebie o 75 cm.

Czy są takie chwile, gdy cały wąż jest prosty? Wtedy musi zachodzić

$$y_w(x,\ t) = 0$$

dla dowolnego x. Nastąpi to wtedy, gdy

$$\cos(kvt) = 0\ ,$$

a więc dla $kvt = \pi/2 + n\pi = \pi(n + \frac{1}{2})$. Warunek ten będzie spełniony w chwilach

$$t_n = \pi(n + \frac{1}{2})/(kv) = (n + \frac{1}{2})\frac{L}{2v} = (n + \frac{1}{2}) \cdot 0.25 \text{ s}\ ,$$

czyli co jedną czwartą sekundy.

18 Zadanie – Dwa jądra atomowe

Oblicz siłę grawitacyjną oraz elektrostatyczną, jaką jądro atomowe $^{56}_{26}$Fe działa na oddalone o 3 mm jądro $^{24}_{12}$Mg. Skorzystaj z tego, że jeden mol atomów $^{12}_{6}$C, czyli około $6.022 \cdot 10^{23}$ atomów, waży 12 g. Stała grawitacji wynosi około $G = 6.7 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, a współczynnik w prawie Coulomba $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2. Wartość bezwzględna ładunku elektronu wynosi około $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Czy stosunek tych sił zależy od odległości między jądrami? Ile on wynosi?

Rozwiązanie

Wartość siły grawitacyjnej wynosi

$$F_g = GM_{Fe}M_{Mg}/R^2\ ,$$

gdzie M_{Fe} oraz M_{Mg} są masami jąder atomowych żelaza i magnezu, a $R = 3$ mm $= 3 \cdot 10^{-3}$ m odległością między nimi. Masy wynoszą:

$$\begin{aligned} M_{Fe} &\approx 56 \cdot 12 \text{ g}/(12 \cdot 6.022 \cdot 10^{23}) = 56 \text{ g}/6.022 \cdot 10^{23} \approx 9 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 9 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \\ M_{Mg} &\approx 24 \text{ g}/6.022 \cdot 10^{23} \approx 4 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 4 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \end{aligned}$$

Podstawiam obliczone wartości:

$$\begin{aligned} F_g &= GM_{Fe}M_{Mg}/R^2 = 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^{-26} \cdot 4 \cdot 10^{-26}/(9 \cdot 10^{-6})\ \mathrm{N} = \\ &\approx 27 \cdot 10^{-57}\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

Wartość siły oddziaływania elektrycznego wynosi

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_{Fe} Q_{Mg}/R^2 \ ,$$

gdzie Q_{Fe} oraz Q_{Mg} są ładunkami jąder żelaza i magnezu. Wynoszą one:

$$\begin{aligned} Q_{Fe} &= 26 \cdot e \approx 26 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 41 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \\ Q_{Mg} &= 12 \cdot e \approx 12 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 19 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

Obliczam wartość siły:

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_{Fe} Q_{Mg}/R^2 \approx 9 \cdot 10^9 \cdot 41 \cdot 10^{-19} \cdot 19 \cdot 10^{-19}/(9 \cdot 10^{-6})\ \mathrm{N} = \\ &\approx 78 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

Stosunek sił nie zależy od odległości miedzy jądrami i wynosi

$$F_g/F_e = 4\pi\varepsilon_0 G M_{Fe} M_{Mg}/(Q_{Fe} Q_{Mg}) \approx 3 \cdot 10^{-36}$$

19 Zadanie – Rozpad (bez kalkulatora)

Po czasie $T = 10^9$ lat w próbce pozostała tylko $1/32$ część z początkowej liczby jąder atomowych pewnego izotopu. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

Rozwiązanie

Jeśli na początku mamy próbkę składającą się z N_0 jąder, to po jednym okresie połowicznego rozpadu (określenia *okres* i *czas* stosowane są wymiennie) – zgodnie z nazwą – pozostanie tylko połowa jąder, czyli $N_0/2$. Po kolejnym okresie połowicznego rozpadu zostanie tylko połowa z $N_0/2$ jąder, czyli $N_0/4$. Wobec tego po k okresach połowicznego rozpadu ($k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...$) pozostanie

$$N_0/2^k$$

jąder. Z treści zadania wiadomo, że pozostało $N_0/32$ jąder. Musimy więc znaleźć takie k, aby

$$N_0/32 = N_0/2^k$$

Prowadzi to do równania $32 = 2^k$. Podstawiając za k kolejne liczby naturalne, trafiamy w końcu na $k = 5$ i ponieważ $2^5 = 32$, stwierdzamy, że $k = 5$ jest rozwiązaniem równania. A więc minęło 5 okresów połowicznego rozpadu $T_{1/2}$. Wnioskujemy stąd, że

$$T_{1/2} = T/5 = 10^9 \text{ lat}/5 = 2 \cdot 10^8 \text{ lat}$$

Osoby, których powyższe rozumowanie nie przekonało, zachęcam do przeprowadzenia następującego „eksperymentu”. Proszę na kartce w kratkę zaznaczyć obszar składający się z 32 kratek. Teraz na połowie kratek stawiamy krzyżyki (te kratki już się rozpadły) - umawiamy się, że minął właśnie pierwszy okres połowicznego rozpadu. Następnie stawiamy krzyżyki na połowie pozostałych, pustych kratek - to drugi półokres rozpadu. Proszę sprawdzić, po ilu etapach „eksperymentu” zostaje tylko jedna pusta kratka.

Rozwiązanie z użyciem logarytmu

Równanie $32 = 2^k$ oczywiście można rozwiązać, obliczając logarytm (np. o podstawie 2) każdej ze stron równania:

$$\log_2 32 = \log_2 2^k$$

Lewą stronę obliczamy, „zgadując” tak jak poprzednio lub korzystając z kalkulatora: $\log_2 32 = 5$. Z definicji logarytmu wynika, że prawa strona jest równa k. I znowu otrzymujemy $5 = k$.

20 Zadanie – Rozpad (z kalkulatorem)

Po czasie $T = 10^5$ lat w próbce pozostało tylko 10% początkowej liczby jąder atomowych pewnego izotopu. Oblicz czas połowicznego rozpadu tego izotopu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez N_0 liczbę jąder na początku, a przez N liczbę jąder po czasie T. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w rozwiązaniu Zadania 19 obowiązuje równanie

$$N = N_0/2^{T/T_{1/2}} \ ,$$

gdzie iloraz $T/T_{1/2}$ jest liczbą okresów połowicznego rozpadu (w Zadaniu 19 oznaczyliśmy go przez k). Powinniśmy doprowadzić to równanie do postaci $T_{1/2} = ...$ Dzieląc obie strony równania przez N oraz mnożąc przez $2^{T/T_{1/2}}$, otrzymujemy

$$2^{T/T_{1/2}} = N_0/N$$

Obliczając logarytm (np. o podstawie 2) każdej ze stron równania, otrzymujemy:

$$T/T_{1/2} = \log_2(N_0/N)$$

I ostatecznie mamy

$$T_{1/2} = T/\log_2(N_0/N)$$

Z treści zadania wiadomo, że $N/N_0 = 10\% = 1/10$, a więc

$$T_{1/2} = 10^5 \text{ lat}/\log_2(10) \approx 10^5 \text{ lat}/3.32 \approx 3 \cdot 10^4 \text{ lat}$$

Jeszcze o podstawie logarytmu

Jeśli Twój kalkulator nie posiada logarytmu o podstawie 2, to możesz skorzystać z następującej własności

$$\log_a b = (\log_c b)/\log_c a$$

Na przykład:

$$\log_2 5 = (\log_{10} 5)/\log_{10} 2 \approx (0.699)/0.301 \approx 2.32$$

21 Zadanie – Kosmiczna czytelnia

Rakieta oddala się od Słońca ze stałą prędkością $v = c\sqrt{0.75}$. Pasażer, posługując się własnym zegarkiem, stwierdził, że czytał książkę przez czas $T = 2$ h. Jaką drogę względem Słońca przebyła rakieta, gdy pasażer oddawał się lekturze? Założyć, że prędkość światła w próżni $c = 10^9$ km/h.

Rozwiązanie

W układzie związanym ze Słońcem lektura trwała

$$T_S = \gamma T \ ,$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, a $\beta = v/c$. Uwzględniając wartość prędkości otrzymuję:

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-0.75} = \sqrt{4} = 2$$

Droga rakiety w układzie związanym ze Słońcem:

$$S = vT_S = v\gamma T$$

Podstawiam wartości liczbowe: $S = 4\sqrt{0.75} \cdot 10^9$ km $= 2\sqrt{3} \cdot 10^9$ km.